فصل

ترسیم‌های هندسی و استدلال

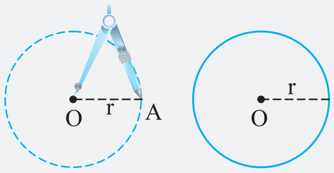
فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال

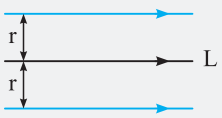
درسنامهٔ ۱

فاصله‌های مشخص در صفحه

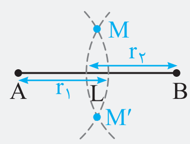
① برای پیدا کردن نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ معلوم r هستند، کافی است دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم کنیم:



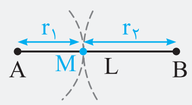
② برای پیدا کردن نقاطی از صفحه که از خط L به فاصلهٔ معلوم r هستند، کافی است دو خط به موازات L و به فاصلهٔ r در طرفین L رسم کنیم:



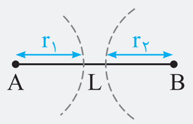
نکته: اگر در مسأله‌ای دنبال نقاطی هستیم که دارای دو ویژگی می‌باشند، باید نقاط مطلوب هر ویژگی را جداگانه رسم کنیم، آن‌گاه محل تلاقی آن‌ها، در صورت وجود، جواب مسأله است. مثلاً اگر دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ L از هم قرار داشته باشند، برای پیدا کردن نقاطی که به فاصلهٔ r_1 از A و به فاصلهٔ r_2 از B باشند، کافی است یک بار به مرکز A و به شعاع r_1 و بار دیگر به مرکز B و شعاع r_2، دایره‌ای رسم کنیم. محل برخورد این دو دایره، در صورت وجود، نقاط مطلوب را مشخص می‌کند.



$r_1+r_2>L \Rightarrow$ دو نقطه

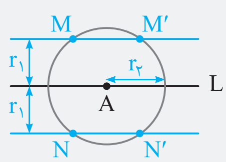


$r_1+r_2=L \Rightarrow$ یک نقطه

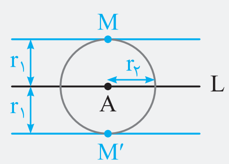


$r_1+r_2<L \Rightarrow$ صفر نقطه

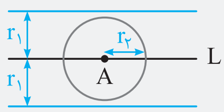
یا مثلاً اگر نقطهٔ A روی خط L باشد و بخواهیم نقاطی را پیدا کنیم که به فاصلهٔ r_1 از خط L و به فاصلهٔ r_2 از نقطهٔ A باشند، کافی است دو خط به موازات L و به فاصلهٔ r_1 از L در طرفین L درنظر بگیریم. سپس دایره‌ای به مرکز A و شعاع r_2 رسم کنیم. محل برخورد دایره و دو خط مفروض در صورت وجود، نقاط مطلوب را مشخص می‌کند.



$r_2>r_1 \Rightarrow$ چهار نقطه



$r_2=r_1 \Rightarrow$ دو نقطه



$r_2<r_1 \Rightarrow$ صفر نقطه

۱- نقطهٔ ثابت A در صفحه مفروض است. نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از A بیشتر از ۳ و کم‌تر از ۵ می‌باشند، چگونه‌اند؟

۱) روی دایره‌ای به شعاع ۴ و مرکز A قرار دارند.
۲) در ناحیه‌ای به مساحت 16π قرار دارند.
۳) چهار نقطه با این شرایط وجود دارد.
۴) روی دو دایره به مرکز A و شعاع‌های ۳ و ۵ قرار دارند.

۲- مرکز تمام دایره‌هایی به شعاع ۲ که در یک صفحه قرار دارند و از نقطهٔ ثابت A می‌گذرند، چگونه‌اند؟

۱) روی دو خط راست گذرا از A می‌باشند.
۲) روی دو خط راست و به فاصلهٔ ۴ از هم قرار دارند.
۳) روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ قرار دارند.
۴) روی دو دایره به مرکز A و شعاع‌های ۲ و ۴ قرار دارند.

۳- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۵ از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۳ واحد از A و به فاصلهٔ ۲ واحد از B قرار داشته باشد؟

۱) ۱
۲) صفر
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۴- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۲ واحد از هر کدام از نقاط A و B باشد؟

۱) ۱ ۲) صفر
۳) بی‌شمار ۴) ۲

۵- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۵ از هم واقع‌اند. دو نقطهٔ M و M' به فاصلهٔ ۳ از A و m از B قرار دارند. چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۷

۶- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۴ از هم قرار دارند. فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۳ از A و $2a-1$ از B قرار دارد. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱ یا ۴

۷- نقاط A و B به فاصلهٔ ۵ از هم قرار دارند. نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ ۳ و ۴ از این نقاط می‌باشند را معلوم کرده و از آن‌ها به A و B وصل می‌کنیم. مجموع مساحت شکل‌های حاصل کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

۸- روی محیط یک مربع، m نقطه وجود دارد که از مرکز مربع به فاصلهٔ معلوم L می‌باشند، m کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۸
۳) ۲ ۴) ۱

۹- روی محیط مربعی به ضلع ۲ واحد، دو نقطه وجود دارد که به فاصلهٔ ۲/۵ واحد از یک رأس مربع قرار دارند. فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا هر یک از این نقاط کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۰- نقطهٔ M درون مربع ABCD به ضلع ۴ قرار دارد. اگر نقاط A و B و وسط ضلع CD از نقطهٔ M به یک فاصله باشند، فاصلهٔ M تا مرکز مربع کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

۱۱- مربع ABCD به ضلع ۳ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع ABCD وجود دارد که فاصله‌اش از قطر AC برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۲
۳) ۱ ۴) صفر

۱۲- نقطهٔ O روی خط L قرار دارد. نقاطی از صفحه که از نقطهٔ O به فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ و از خط L به فاصلهٔ m می‌باشند، رأس‌های یک مربع هستند. m کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱

۱۳- نقطهٔ A روی خط d و نقطهٔ B خارج خط d و به فاصلهٔ ۴ از خط d قرار دارند. اگر نقاط C و D روی خط d به‌گونه‌ای باشند که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ A برابر ۳ و از نقطهٔ B برابر m باشد، m کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۱۴- نقطهٔ A و خط d مفروض‌اند. حداکثر چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ و از خط d به فاصلهٔ ۲/۵ می‌باشند؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵- دو خط موازی d و d' به فاصلهٔ ۲ از هم در صفحه مفروض‌اند. نقطهٔ A در صفحه به گونه‌ای است که روی این دو خط قرار ندارد. اگر سه نقطه روی این دو خط باشند که به فاصلهٔ ۳ از نقطهٔ A باشند، مجموع فاصله‌های نقطهٔ A تا این دو خط کدام است؟

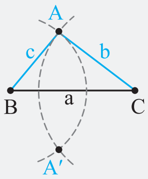
۱) ۱ ۲) ۵
۳) ۴ ۴) این وضعیت امکان ندارد.

۱۶- نقطهٔ A خارج خط d مفروض است. اگر سه نقطه در صفحه وجود داشته باشند که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ و از خط d به فاصلهٔ ۲ باشند، چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۱ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۴

درسنامهٔ ۲

رسم مثلث (۱)



① رسم مثلث با معلوم بودن سه ضلع

اگر a ، b و c اندازهٔ اضلاع مثلث ABC باشند، برای رسم آن ابتدا پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم. سپس یک بار به مرکز C و شعاع b و بار دیگر به مرکز B و شعاع c دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل تلاقی این دو دایره، رأس A از مثلث ABC است.

نکته: همان‌طور که می‌بینید دو دایره همدیگر را در دو نقطهٔ A و A' قطع می‌کنند اما مثلث $A'BC$ با مثلث ABC هیچ فرقی ندارد و در واقع یکی هستند. به قول معروف این دو مثلث هم‌نهشت می‌باشند. به‌طور کلی **با معلوماتی که دو مثلث هم‌نهشت می‌شوند (ض‌ض‌ض ـ ض‌زض ـ زض‌ز) بیشتر از یک مثلث منحصر به فرد نمی‌توان رسم کرد.**

شرط وجود مثلث: سه عدد حقیقی مثبت a ، b و c داده شده‌اند. اگر هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد، آن‌گاه مثلثی وجود دارد که اضلاع آن a ، b و c هستند. مثلاً مثلثی وجود دارد که طول اضلاع آن ۱۰، ۱۷ و ۱۲ باشد، زیرا:

$۱۰ < ۱۷ + ۱۲ \quad , \quad ۱۷ < ۱۲ + ۱۰ \quad , \quad ۱۲ < ۱۷ + ۱۰$

توجه: اگر اندازه‌های داده شده، عددی معلوم باشند (پارامتری نباشند) فقط کافی است بزرگ‌ترین عدد از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد. چون اگر این نامساوی برقرار باشد، مطمئناً دو نامساوی دیگر نیز برقرار هستند. مثلاً چون $۱۷ < ۱۲ + ۱۰$ می‌باشد، پس مثلثی با اضلاع ۱۰، ۱۷ و ۱۲ وجود دارد.

۱۷- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای وتر آن مشخص است. با معلوم بودن اندازهٔ کدام جزء دیگر، این مثلث قابل رسم نیست؟

۱) ارتفاع وارد بر وتر ۲) ارتفاع وارد بر ضلع قائم ۳) میانهٔ وارد بر وتر ۴) میانهٔ وارد بر ضلع قائم

۱۸- کدام دسته از اعداد زیر می‌تواند سه ضلع یک مثلث باشد؟

۱) ۷,۵,۳ ۲) ۶,۳,۲ ۳) ۳,۲,۱ ۴) ۴,۳,۱

۱۹- در مثلث ABC ، $b = ۱۲$ و $c = ۵$ است. حدود ضلع BC کدام است؟

۱) $a < ۱۷$ ۲) $۷ < a < ۱۷$ ۳) $۱۰ < a < ۱۷$ ۴) $۵ < a < ۱۵$

۲۰- در مثلث ABC طول اضلاع ۲x ، $x - ۱$ و ۱۷ می‌باشد. x چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۱- در بین مثلث‌هایی با اضلاع ۳/۵ ، ۶ و $۵x + ۱$ که اندازهٔ محیط آن‌ها مقداری صحیح است، بیشترین مقدار محیط برابر چند می‌باشد؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۲۲- مثلثی با اضلاع ۲، ۵ و $۲x - ۱$ که x در آن عددی صحیح می‌باشد، چگونه است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین ۳) نامشخص ۴) قابل رسم نیست.

۲۳- سه پاره‌خط به طول‌های $۴x - ۴$ ، $x + ۷$ و ۶x اضلاع مثلثی هستند، مقادیر x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۳$ ۲) $\frac{۵}{۳} < x < ۳$ ۳) $۲ < x < ۳$ ۴) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۴$

۲۴- اگر برای رسم مثلثی با اضلاع $x + ۱$ ، $۲x + ۴$ و $۴x - ۳$ حدود x به‌صورت $\alpha < x < \beta$ باشد، مقدار $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۵- به ازای چند x صحیح، مثلث ABC به اضلاع ۸، $۴x - ۱$ و $۲x + ۳$ و مثلث $A'B'C'$ به اضلاع $۳x - ۲$ ، $۲x + ۵$ و ۴ هر دو قابل رسم هستند؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳

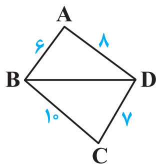
۲۶- محیط مثلثی برابر ۲۴ می‌باشد. کدام گزینهٔ زیر نمی‌تواند طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث باشد؟

۱) ۱۰/۵ ۲) ۹ ۳) ۱۳ ۴) ۱۰

۲۷- محیط یک مثلث متساوی‌الساقین برابر ۱۶ می‌باشد. طول ساق مثلث چند مقدار صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸- در چهارضلعی شکل مقابل، طول قطر BD چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟



۱) ۸ ۲) ۹
۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۲۹- با معلومات a و h_c و دانستن زاویهٔ B چند مثلث ناهم‌نهشت می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) صفر یا بی‌شمار

۳۰- چند مثلث ABC با معلوم بودن $b=۴$، $c=۷$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۱- چند مثلث ABC با معلوم بودن $b=۴$، $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $\hat{C}=۷۵^\circ$ قابل رسم است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۲- چند مثلث می‌توان رسم کرد که دو زاویهٔ آن ۳۵° و ۴۵° و یک ضلع آن ۸ باشد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

۳۳- با معلومات $AB=۶$، $AC=۶$ و $\hat{B}=۴۵^\circ$ چند مثلث مشخص می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۴- در رسم مثلث ABC با معلوم بودن $a=۵$، $h_b=۴$ و $h_a=۶$، تعداد جواب‌های غیرهم‌نهشت کدام است؟

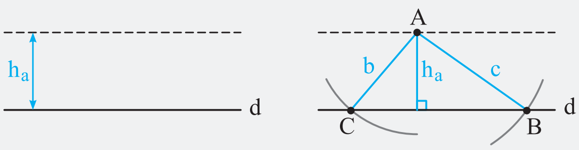
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

درسنامه ۳

رسم مثلث (۲)

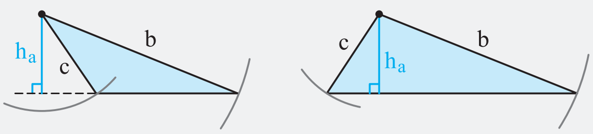
۴) رسم مثلث با معلوم بودن دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم

اگر b و c دو ضلع مثلث و h_a ارتفاع وارد بر ضلع a در مثلث ABC داده شده باشند، ابتدا خط d را رسم می‌کنیم، چون فاصلهٔ رأس A از ضلع BC برابر h_a می‌باشد، پس A روی خطی به موازات d و به فاصلهٔ h_a از آن است. روی این خط نقطهٔ دلخواه A را معلوم می‌کنیم. حال به مرکز A، یک بار به شعاع b و بار دیگر به شعاع c یک کمان رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطهٔ C و B قطع کنند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC، مثلث مطلوب است.

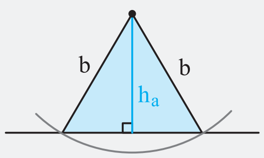


با توجه به اندازه‌های b، c و h_a یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:

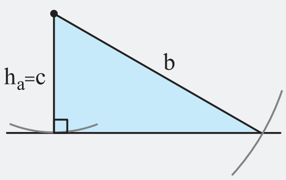
الف) اگر $b\neq c$ باشد، چون $h_a<b$ و $h_a<c$ می‌باشد، دو مثلث حاصل می‌شود که یکی حاده‌الزاویه و دیگری منفرجه‌الزاویه است:



ب) اگر $b=c$ و $h_a<b=c$ باشد، یک مثلث متساوی‌الساقین قابل رسم است:



پ) اگر $b\neq c$ و h_a برابر ضلع کوچک‌تر باشد، یک مثلث قائم‌الزاویه قابل رسم است:



غیر از موارد فوق، هیچ مثلثی قابل رسم نیست.

۳۵- در رسم مثلث ABC با معلومات $c=۶$، $b=۱۰$ و $h_a=۴$ چند مثلث قابل رسم است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۳۶- در رسم مثلث ABC با معلومات $a=۳$، $b=۱$ و $h_c=۲$ چند مثلث قابل رسم است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۳۷- چند مثلث با اضلاع ۱۰ و ۶ و اندازهٔ ارتفاع ۸ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۳۸- در رسم مثلث ABC با معلومات $c = 2x + 5$ ، $b = x + 6$ و $h_a = 2x + 3$ ، یک مثلث قائم‌الزاویه حاصل شده است. طول وتر این مثلث کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۳۹- در رسم مثلث ABC با معلومات $c = 14$ ، $b = 10$ و h_a دو مثلث متمایز ایجاد شده است. بیشترین مقدار صحیح h_a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۴۰- در رسم مثلث ABC با معلوم بودن $b = 8$ ، $c = x + 3$ و $h_b = 2x - 3$ یک مثلث قابل رسم است. x کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۴۱- با معلومات $a = 10$ ، $m_a = 6$ و $h_a = 5$ ، چند مثلث ناهم‌نهشت می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۲- آیا با معلومات $a = 8$ ، $m_a = 13$ و $h_a = 5$ ، مثلث ABC قابل رسم است؟ در صورت قبول، فاصلهٔ دورترین رأس از ارتفاع کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) قابل رسم نیست.

۴۳- آیا می‌توان با معلومات $m_a = 3$ ، $a = 8$ و $h_a = 3$ مثلثی رسم کرد؟ در صورت قبول، نسبت ضلع بزرگ‌تر به ضلع کوچک‌تر در این مثلث کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۶ ۴) قابل رسم نیست.

۴۴- آیا می‌توان با معلومات $h_a = 7$ ، $m_a = 25$ و $a = 48$ مثلثی رسم کرد؟ در صورت قبول، نوع مثلث کدام است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین ۳) نامشخص ۴) قابل رسم نیست.

۴۵- در مثلثی $h_a = 8$ ، $m_a = 10$ و $c = 17$ می‌باشند. طول ضلع a کدام می‌تواند باشد تا مثلث قابل رسم باشد؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۴۶- آیا می‌توان با معلومات $h_a = 8$ ، $c = 10$ و $m_a = 17$ مثلثی رسم کرد؟ در صورت قبول، مقدار a کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۰ ۳) ۴۲ ۴) قابل رسم نیست.

۴۷- آیا می‌توان با معلومات $m_a = 8$ ، $b = 4$ و $h_a = 5$ مثلثی رسم کرد؟ در صورت قبول، فاصلهٔ رأس B از h_a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) قابل رسم نیست.

۴۸- مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $b = 9$ و میانهٔ $m_a = 6$ و ضلع a قابل رسم است. a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۲۰ ۴) ۶

۴۹- در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $b = 7$ و $c = 5$ و میانهٔ $m_a = 4$ با خط‌کش و پرگار، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) غیرقابل رسم ۲) جواب منحصربه‌فرد ۳) دو جواب متمایز ۴) فاقد جواب

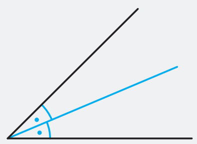
۵۰- با معلومات $c = 7$ ، $b = 5$ و $m_a = 2x - 1$ مثلث ABC قابل رسم است. x چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درسنامهٔ ۴

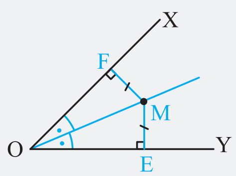
نیمساز

نیمساز زاویه: نیمساز یک زاویه، خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.



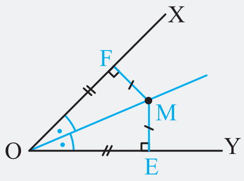
ویژگی‌های نیمساز یک زاویه

① هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله می‌باشد و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.



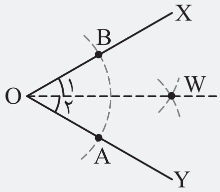
M روی نیمساز $X\hat{O}Y$ است. $\Leftrightarrow ME = MF$

② اگر از نقطه‌ای دلخواه روی نیمساز، دو عمود بر دو ضلع زاویه رسم کنیم، پاره‌خط‌هایی که روی دو ضلع زاویه ایجاد می‌شوند، با هم برابرند.

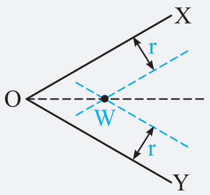


روش رسم نیمساز یک زاویه

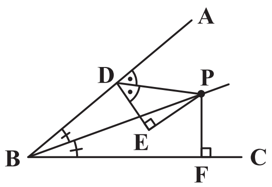
① برای رسم نیمساز زاویهٔ XOY، به مرکز O و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و به مراکز A و B دو کمان می‌زنیم تا همدیگر را در W قطع کنند. از W به O وصل می‌کنیم. OW نیمساز زاویهٔ XOY است، زیرا مثلث‌های OAW و OBW به حالت سه ضلع برابر همنهشت می‌باشند، بنابراین $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ است.



② برای رسم نیمساز زاویهٔ XOY، دو خط به فاصلهٔ r از هر یک از اضلاع زاویه رسم می‌کنیم. این دو خط همدیگر را در نقطهٔ W قطع می‌کنند. از O به W وصل می‌کنیم. OW نیمساز زاویه می‌باشد، زیرا فاصلهٔ W تا دو ضلع زاویه برابر r است، پس روی نیمساز قرار دارد.

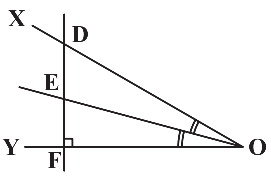


۵۱- در شکل مقابل، نقطهٔ P روی نیمساز زاویه‌های ABC و ADE قرار دارد. اگر PF = ۵ باشد، طول پاره‌خط PE کدام است؟



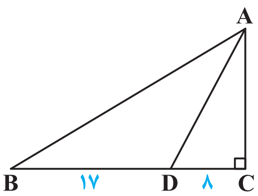
۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۵۲- در شکل مقابل، نیمساز زاویهٔ XOY رسم شده است. کدام گزینه درست است؟



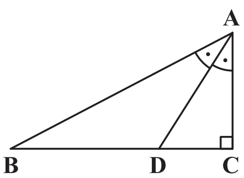
۱) EF < DE
۲) EF = DE
۳) EF = ۲DE
۴) EF > DE

۵۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل مقابل، AD نیمساز زاویهٔ A می‌باشد. در این مثلث، وتر چند واحد از ضلع کوچک‌تر مثلث، بزرگ‌تر است؟



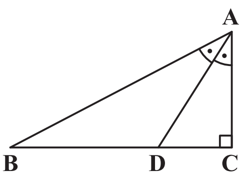
۱) ۱۱
۲) ۱۳
۳) ۹
۴) ۱۵

۵۴- در شکل مقابل، اگر BD = ۱۵ و AB − AC = ۱۲ باشد، طول پاره‌خط DC کدام است؟



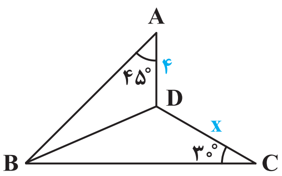
۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۵۵- در شکل مقابل، مثلث ACB قائم‌الزاویه است. اگر AB = AC + ۸ و BD = DC + ۴ باشد، طول پاره‌خط DC کدام است؟



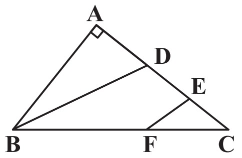
۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

۵۶- در شکل مقابل، BD نیمساز زاویهٔ ABC است. مقدار x کدام است؟



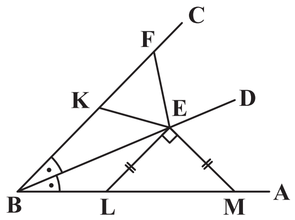
۱) ۶
۲) ۴√۲
۳) ۵
۴) ۲√۶

۵۷- در شکل مقابل، BD نیمساز زاویهٔ B، $AB = BF$، $DE = EC$، $AD = ۶$ و $EF = ۵$ می‌باشد. طول FC کدام است؟



۱) ۹
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۵۸- در شکل مقابل، BD نیمساز زاویهٔ ABC است. اگر KEF مثلث متساوی‌الاضلاع به مساحت $۳\sqrt{۳}$ و LEM مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشد، طول وتر آن کدام است؟

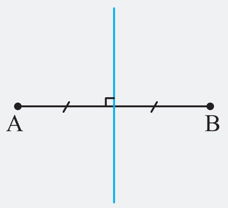


۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) ۶
۳) ۸
۴) $۲\sqrt{۲}$

درسنامهٔ ۵

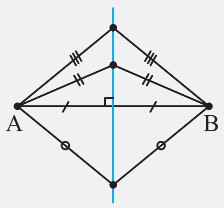
عمودمنصف

عمودمنصف پاره‌خط: عمودمنصف یک پاره‌خط، خطی است که در وسط پاره‌خط، بر آن عمود است.



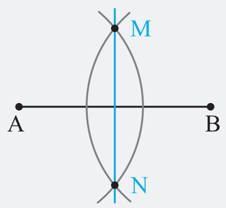
ویژگی‌های عمودمنصف

هر نقطه‌ای که روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، از نقاط A و B به یک فاصله است و همچنین هر نقطه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف AB قرار دارد.



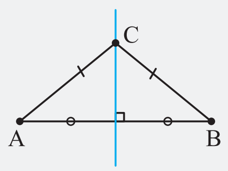
رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

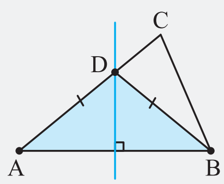
برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB، دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و به مراکز A و B دو کمان رسم می‌کنیم. محل تقاطع این دو کمان را به هم وصل می‌کنیم. چون این دو نقطه، فاصلهٔ یکسانی از A و B دارند، پس روی عمودمنصف AB قرار دارند.



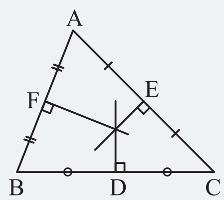
توجه: از یک نقطه در صفحه، بی‌شمار خط می‌گذرد ولی از دو نقطه در یک صفحه، یک و فقط یک خط می‌گذرد. بنابراین برای این‌که یک خط را به‌طور کامل در صفحه مشخص کنیم، نیاز به حداقل دو نقطه از خط داریم.

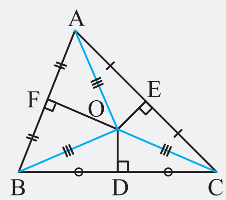
نکته: اگر از هر نقطه روی عمودمنصف، یک پاره‌خط به دو سر آن وصل کنیم یک مثلث متساوی‌الساقین حاصل می‌شود.



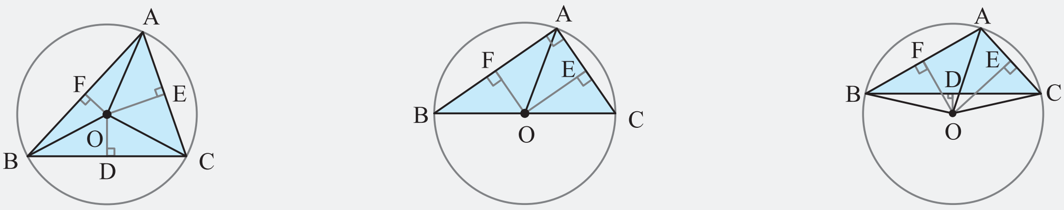


نتیجه ۱: محل تلاقی عمودمنصف‌های یک مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است:





نتیجه ۲: می‌دانیم هر نقطه روی دایره از مرکز دایره به یک فاصله است، پس دایره‌ای وجود دارد که مرکز آن محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث است و از سه رأس مثلث می‌گذرد.



۵۹- برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB، نیاز به زدن چند کمان داریم؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۶۰- می‌خواهیم به کمک خط‌کش و پرگار از نقطهٔ M روی خط d، خطی بر d عمود کنیم. برای این کار نیاز به رسم چند دایره داریم؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

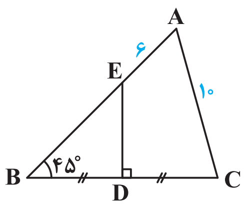
۶۱- در یک مثلث قائم‌الزاویه، فاصلهٔ نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها از رأس قائم برابر ۳ می‌باشد. طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۶۲- در مثلث ABC $(AB = ۱۲\,,\,\widehat{C} = ۳۰^\circ)$ عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC یکدیگر را در نقطهٔ F روی ضلع BC قطع می‌کنند. طول پاره‌خط FC کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) ۱۵

۶۳- در مثلث شکل مقابل، طول عمودمنصف ضلع BC کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۲}$
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) ۶
۴) ۴

۶۴- مرکز دایرهٔ گذرا از سه رأس مثلث ABC بیرون این مثلث قرار دارد. کدام گزینه می‌تواند اندازهٔ دو زاویهٔ این مثلث باشد؟

۱) $۳۰^\circ, ۷۰^\circ$ ۲) $۵۵^\circ, ۳۵^\circ$
۳) $۴۰^\circ, ۳۰^\circ$ ۴) $۸۰^\circ, ۳۰^\circ$

۶۵- در مثلث ABC داریم $AB = AC$، $\widehat{A} = ۸۰^\circ$ و عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعدهٔ BC را در M و N قطع می‌کنند. کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث AMN چند درجه است؟ ریاضی داخل ۹۲

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

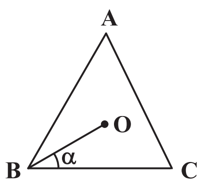
۶۶- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۶ و ۲، عمودمنصف وتر امتداد ضلع کوچک‌تر را در M قطع کرده است. فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مثلث کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳) $\sqrt{۸۰}$ ۴) $\frac{۲۵}{۳}$

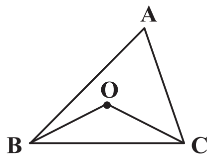
۶۷- در یک مستطیل به طول ۱۲، عمودمنصف قطر امتداد عرض مستطیل را در نقطهٔ M قطع می‌کند. اگر فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مستطیل برابر ۹ باشد، عرض مستطیل کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۶۸- در شکل مقابل، O محل تلاقی عمودمنصف‌های مثلث ABC است. اگر $A = ۵۶^\circ$ باشد، مقدار α کدام است؟

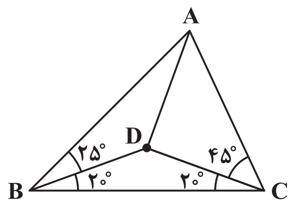


۱) ۲۸° ۲) ۳۰°
۳) ۳۶° ۴) ۳۴°



۶۹- در شکل مقابل، O نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های مثلث ABC است. اگـر $O\hat{B}C = ۲۷^\circ$ و $O\hat{C}A = ۴۴^\circ$ باشد، زاویهٔ OBA چند درجه است؟

۱) ۲۲　　۲) ۲۰
۳) ۱۹　　۴) ۲۱



۷۰- در شکل مقابل، $DB = ۳$ می‌باشد. طول ضلع AC کدام است؟

۱) ۳
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) ۶

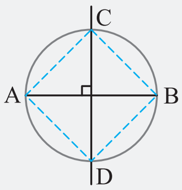
درسنامه ۶

رسم چهارضلعی‌ها

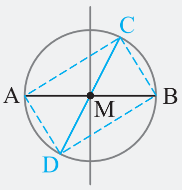
برای رسم یک چهارضلعی به کمک خط‌کش و پرگار، باید ویژگی‌های آن چهارضلعی را بدانیم و به کمک رسم‌هایی که تا به حال آموختیم سعی بر اجرای ویژگی‌های چهارضلعی موردنظر داشته باشیم. با توجه به کتاب درسی، برای رسم مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع و لوزی ویژگی‌هایی کـه بـه آن‌ها نیاز داریم به قرار زیر است:

۱) در متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگر هستند.
۲) در مستطیل، قطرها با هم برابر و منصف هم هستند.
۳) در لوزی، قطرها عمودمنصف یکدیگرند.
۴) در مربع، قطرها با هم برابر و عمودمنصف یکدیگرند.

مثلاً از ویژگی‌های فوق به‌صورت زیر در رسم مربع و مستطیل استفاده می‌کنیم:



رسم مربع به قطر a: چون در مربع، قطرها عمودمنصف یکدیگرند، بنابراین کافی است عمودمنصف پاره‌خط AB بـه طول a را رسم کرده، سپس به مرکز نقطهٔ تلاقی آن‌ها، دایره‌ای به شعاع $\frac{a}{۲}$ رسم کنیم تا عمودمنصف AB را در C و D قطع کند. چهارضلعی ACBD مربع مطلوب است.



رسم مستطیل به قطر a: از آن‌جایی که در مستطیل، قطرها با هم برابر و منصف یکدیگرند، کافی است عمودمنصف پاره‌خط AB به طول a را رسم کنیم تا وسط پاره‌خط AB معلوم شود. حال بـه مرکز وسط AB دایـره‌ای بـه شعاع $\frac{a}{۲}$ رسم می‌کنیم. هر قطر غیرمنطبق و غیرعمود بر AB نظیر CD را رسم مـی‌کنیم. چهارضلعی ACBD مستطیل است.

۷۱- پاره‌خط AB به طول ۸ مفروض است. عمودمنصف AB آن را در نقطهٔ M قطع می‌کند، به مرکز M و شعاع R یک دایره رسم مـی‌کنیم تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند. اگر چهارضلعی ACBD مربع باشد، R کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۴　　۳) ۶　　۴) هر مقداری بزرگ‌تر از ۴

۷۲- پاره‌خط AB به طول ۶ مفروض است. از نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB دایره‌ای به شعاع ۳ رسـم کـرده، سـپس قطـر CD از دایـره کـه غیرمنطبق و غیرعمود بر AB می‌باشد را رسم می‌کنیم. چهارضلعی ACBD کدام است؟

۱) مربع　　۲) لوزی　　۳) مستطیل　　۴) ذوزنقه

۷۳- پاره‌خط AB به طول ۶ مفروض است. از نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB، دایره‌ای به شعاع ۴ رسم کرده و قطر CD از دایره را رسم می‌کنیم. کدام گزینه در مورد چهارضلعی ACBD صحیح است؟

۱) مستطیل به قطر ۸　　۲) مستطیل به اضلاع ۶ و ۸
۳) متوازی‌الاضلاع به قطرهای ۶ و ۸　　۴) متوازی‌الاضلاع به اضلاع ۶ و ۸

۷۴- پاره‌خط AB به طول ۵ مفروض است. یک‌بار به مرکز A و به شعاع‌های ۴ و ۶ دو کمان رسم می‌کنیم و این کار را بار دیگر بـه مرکـز B تکرار می‌کنیم. کمان‌هایی که شعاع آن‌ها برابر نیست همدیگر را در ۴ نقطه قطع می‌کنند. دو نقطه از این چهار نقطه که در طرفین AB می‌باشند را C و D می‌نامیم. اگر CD بر AB عمود نباشد، چهارضلعی ACBD کدام است؟

۱) لوزی ۲) مربع
۳) مستطیل ۴) متوازی‌الاضلاع

۷۵- پاره‌خط AB به طول ۵ مفروض است. عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم تا آن را در نقطهٔ M قطع کند. به مرکز M و شعاع ۳ یک دایـره رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در C و D قطع کند. چهارضلعی ACBD کدام است؟

۱) مربع به قطر ۶ ۲) لوزی به قطرهای ۵ و ۳
۳) مربع به قطر ۵ ۴) لوزی به قطرهای ۵ و ۶

۷۶- پاره‌خط AB به طول ۶ مفروض است. عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ A دایره‌ای به شعاع ۵ رسم کرده تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند. چهارضلعی ACBD کدام است؟

۱) مربع به قطر ۶ ۲) لوزی به قطرهای ۵ و ۶
۳) مستطیل به اضلاع ۵ و ۶ ۴) لوزی به قطرهای ۶ و ۸

۷۷- کدام چهارضلعی با معلوم بودن طول یک قطر آن به‌طور منحصربه‌فرد مشخص می‌شود؟

۱) لوزی ۲) مربع ۳) مستطیل ۴) متوازی‌الاضلاع

۷۸- متوازی‌الاضلاعی با طول دو ضلع ۵ و ۹ و طول قطر d رسم شده است. d کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۱۳

۷۹- با معلومات $AC = ۱۲$ ، $BD = ۶$ و $AB = a$ ، متوازی‌الاضلاع ABCD رسم شده است. a کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۴

۸۰- با کدام دسته معلومات داده‌شده نمی‌توان فقط یک متوازی‌الاضلاع رسم کرد؟

۱) طول دو قطر و اندازهٔ زاویهٔ بین آن‌ها ۲) طول دو ضلع مجاور و یکی از قطرها
۳) طول دو ضلع مجاور و یکی از زاویه‌ها ۴) طول چهار ضلع

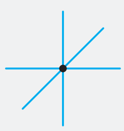
۸۱- با معلومات طول ضلع a و طول قطر کوچک ۶ یک لوزی رسم شده است. a کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۸

درسنامه ۷

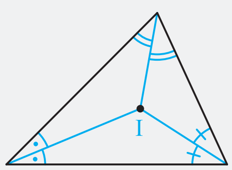
خطوط همرس

خطوط همرس: اگر حداقل سه خط، از یک نقطه عبور کنند به آن‌ها خطوط همرس می‌گویند.

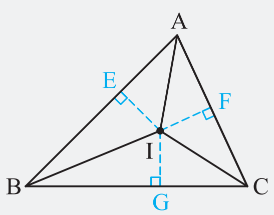


خطوط همرس در مثلث

① نیمسازهای داخلی هر مثلث همرس‌اند. نقطهٔ تلاقی نیمسازهای داخلی همواره درون مثلث قرار دارد.

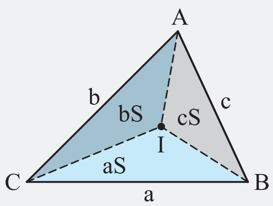


نکته: چون هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله اسـت، پـس نقطـهٔ همرسـی یعنـی I از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

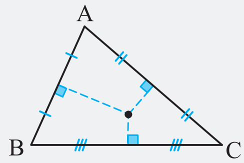


I نقطهٔ همرسی نیمسازها است. $\Leftrightarrow IG = IE = IF$

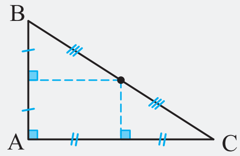
نکته: چون سه مثلث BIA ، BIC و CIA هم‌ارتفاع هستند، پس مساحت آن‌ها متناسب با اضلاع مثلث است.



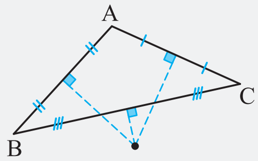
۲) عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث همرس‌اند. نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌ها ممکن است درون مثلث، روی محیط مثلث یا بیرون مثلث باشد:



مثلث حاده‌الزاویه است.

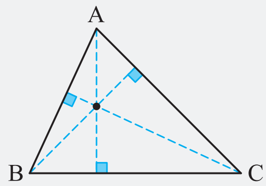


مثلث قائم‌الزاویه است.

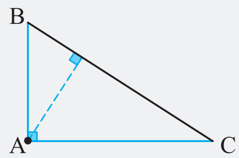


مثلث منفرجه‌الزاویه است.

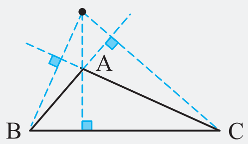
۳) ارتفاع‌های مثلث یا امتدادهای آن‌ها همرس‌اند. نقطهٔ تلاقی آن‌ها به‌صورت زیر است:



مثلث حاده‌الزاویه است.



مثلث قائم‌الزاویه است.



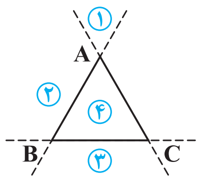
مثلث منفرجه‌الزاویه است.

۴) میانه‌های هر مثلث همرس‌اند. نقطهٔ تلاقی میانه‌ها همواره درون مثلث قرار دارد که به‌طور مفصل در فصل سوم به آن می‌پردازیم.

۸۲- در یک مثلث، تفاضل دو زاویهٔ داخلی، دو برابر زاویهٔ داخلی سوم است. محل تلاقی سه ارتفاع مثلث کجا قرار دارد؟

۱) داخل مثلث
۲) روی محیط مثلث
۳) خارج مثلث
۴) هر سه حالت ممکن است.

۸۳- در مثلث ABC شکل مقابل، $\hat{B}=۴۲^\circ$ و $\hat{C}=۴۷^\circ$ می‌باشد. محل برخورد ارتفاع‌های مثلث در کدام ناحیه قرار دارد؟



۱) ①
۲) ②
۳) ④
۴) ③

۸۴- اگر در مثلث ABC زاویهٔ $\hat{A}=۹۲^\circ$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) نقطهٔ تلاقی سه میانه خارج مثلث است.
۲) نقطهٔ تلاقی سه نیمساز خارج مثلث است.
۳) نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع خارج مثلث است.
۴) نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع روی ضلع BC است.

۸۵- نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌های مثلثی به طول اضلاع ۱۴/۵، ۱۰/۵ و ۱۰ کجا واقع است؟

۱) درون مثلث
۲) بیرون مثلث
۳) روی محیط مثلث
۴) وسط ضلع بزرگ‌تر

۸۶- چند نقطه در صفحه وجود دارد که از سه نقطهٔ غیر واقع بر یک راستا به یک فاصله باشند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) بستگی به چگونگی قرارگیری نقاط دارد.

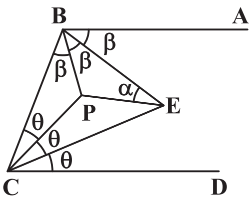
۸۷- در مثلث ABC از هر رأس خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس، رسم می‌کنیم تا مثلث DEF به‌وجود آید. ارتفاع‌های مثلث ABC هم‌دیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. نقطهٔ O برای مثلث DEF چگونه نقطه‌ای است؟

۱) محل همرسی عمودمنصف‌ها
۲) محل همرسی میانه‌ها
۳) محل همرسی ارتفاع‌ها
۴) محل همرسی نیمسازها

۸۸- در مثلثی $AC=۸$ ، $AB=\frac{۴}{۳}$ و $\hat{A}=۱۲۰^\circ$. فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌های نظیر این دو ضلع از ارتفاع سوم مثلث کدام است؟

۱) صفر
۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۱
۴) $\frac{۲}{۳}$

۸۹- در شکل مقابل، $BA \parallel CD$ می‌باشد. مقدار α کدام است؟



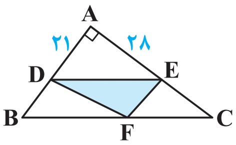
۱) ۱۵°

۲) ۳۰°

۳) ۴۵°

۴) ۶۰°

۹۰- در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ و محل برخورد نیمسازهای داخلی روی پاره‌خط DE قرار دارد. مساحت مثلث DEF کدام است؟



۱) ۲۱۰ ۲) ۱۹۰

۳) ۲۲۰ ۴) ۱۸۰

۹۱- در مثلث ABC، $\hat{B} = ۴۰^\circ$ و $\hat{C} = ۲۰^\circ$ می‌باشد. اگر I محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث ABC باشد، حاصل $\frac{CI}{AB}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۲}$

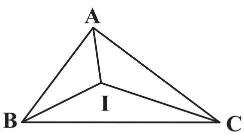
۹۲- در مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائم ۵ و ۱۲، فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی نیمسازها از وتر مثلث کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) ۳

۹۳- در مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائم ۶ و ۸ از محل تلاقی نیمسازها به دو سر وتر وصل می‌کنیم. مساحت مثلث حاصل کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۹

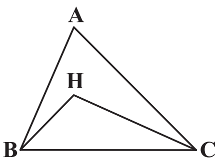
۹۴- در شکل مقابل، I محل تلاقی نیمسازهای مثلث ABC است. اگر $\frac{S_{ABI}}{S_{AIC}} = \frac{۳}{۴}$، $B\hat{I}C = ۱۳۵^\circ$ و $BC = ۱۰$ باشد، $AB + AC$ کدام است؟



۱) ۱۸ ۲) ۱۶

۳) ۱۴ ۴) ۲۰

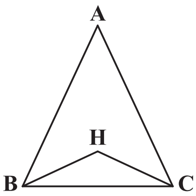
۹۵- در شکل مقابل، H نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC است. اگر $AB = ۷$، $BH = ۴$ و $CH = ۷$ باشد، طول ضلع AC کدام است؟



۱) $\sqrt{۸۰}$ ۲) ۹

۳) $\sqrt{۸۱}$ ۴) $\sqrt{۸۲}$

۹۶- در شکل مقابل، H نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC است. اگر $B\hat{H}C = ۱۳۰^\circ$ باشد، زاویهٔ A چند درجه است؟



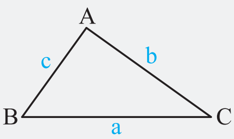
۱) ۵۵ ۲) ۶۰

۳) ۵۰ ۴) ۴۵

درسنامهٔ ۸

نامساوی‌ها در مثلث

① **قضیهٔ زاویه و ضلع برتر:** ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر است و برعکس.

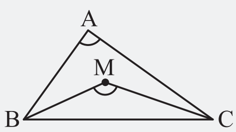


$$\hat{B} > \hat{C} \Leftrightarrow b > c$$

نتیجه: در مثلث ABC داریم:

$$\hat{A} > \hat{B} > \hat{C} \Leftrightarrow a > b > c$$

② اگر M نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC باشد، داریم:



$$\hat{M} > \hat{A} \quad , \quad BC < MB + MC < AB + AC$$

$$\frac{۱}{۲}(\text{محیط}) < MA + MB + MC < \text{محیط}$$

۹۷- در مثلث ABC، میانهٔ AM و نیمساز داخلی AD رسم شده است. اگر $AD < AM$ باشد، کدام گزینه <u>نمی‌تواند</u> طول اضلاع مثلث ABC باشد؟

۱) ۵,۴,۳ ۲) ۸,۹,۱۵ ۳) ۱۰,۱۰,۶ ۴) نشدنی

۹۸- در مثلث ABC، $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $\hat{C} = ۶۱^\circ$ می‌باشد. کدام گزینه صحیح است؟

۱) $b + c < a + b < c + a$ ۲) $a + b < c + a < b + c$

۳) $b + c < c + a < a + b$ ۴) $a + b < b + c < c + a$

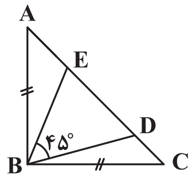
۹۹- در مثلث ABC، نیمساز داخلی زاویهٔ A ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. کدام نامساوی همواره صحیح است؟

۱) $AB > BD$ ۲) $AD > BD$ ۳) $AB > AD$ ۴) $BD > AD$

۱۰۰- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، پای ارتفاع وارد بر وتر BC را نقطهٔ H می‌نامیم. اگر $\hat{B} = ۴۴^\circ$ باشد، کدام نتیجه‌گیری همواره صحیح است؟

۱) $AH < BH < CH < AB$ ۲) $CH < AH < BH < AB$

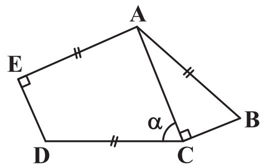
۳) $AH < CH < BH < AB$ ۴) $CH < BH < AH < AB$



۱۰۱- در شکل مقابل، مثلث ABC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. اگر $AE > CD$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $DE < EB < BD$ ۲) $DE < BD < EB$

۳) $BD < DE < EB$ ۴) $EB < BD < DE$



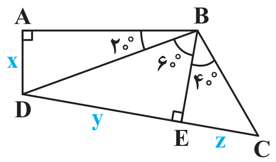
۱۰۲- در شکل مقابل، مقدار α کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴۵°

۲) ۶۵°

۳) ۶۰°

۴) ۵۵°



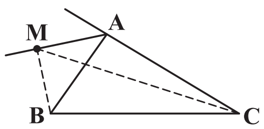
۱۰۳- در شکل مقابل، کدام رابطه، برقرار است؟

۱) $x > y + z$ ۲) $z > x + y$

۳) $y > x + z$ ۴) $y > ۲x + z$

۱۰۴- در مثلث ABC داریم $\hat{A} > \hat{C}$، نیمساز زاویهٔ B و عمودمنصف ضلع AB در نقطهٔ D متقاطع‌اند. M و N پای عمودهایی است که از نقطهٔ D به‌ترتیب بر BA و BC رسم شده‌اند. کدام نابرابری درست است؟ ریاضی داخل ۹۵

۱) $NC > NB$ ۲) $NC < NB$ ۳) $DA > DC$ ۴) $AM < NB$



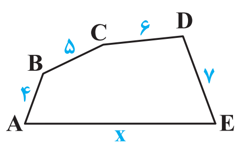
۱۰۵- در شکل مقابل، نقطهٔ M روی نیمساز خارجی زاویهٔ A است. نسبت $\frac{MB + MC}{AB + AC}$ چگونه است؟

۱) بزرگ‌تر از ۱ ۲) کم‌تر از ۱

۳) برابر با ۱ ۴) غیرمشخص

۱۰۶- در مثلث ABC، $BC = ۲۴$ و $AC = ۳AB$ می‌باشد. محیط مثلث ABC کدام عدد می‌تواند باشد؟

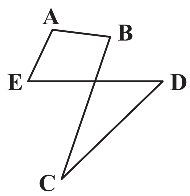
۱) ۸۴ ۲) ۴۴ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴



۱۰۷- در شکل مقابل، x کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۱

۳) ۲۲ ۴) ۲۵



۱۰۸- در شکل مقابل، $AB = ۶$، $BC = ۸$، $CD = ۹$ و $EA = ۵$ است. طول ED کدام می‌تواند باشد؟

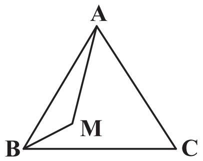
۱) ۳۰

۲) ۳۲

۳) ۲۸

۴) ۲۶

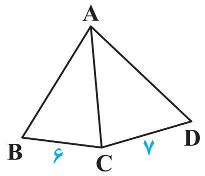
۱۰۹- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اگر محیط مثلث ABC، ۴ واحد بیشتر از محیط مثلث ABM باشد، محیط مثلث ABC کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۰

۳) ۸ ۴) ۱۴

۱۱۰- در شکل مقابل، مجموع محیط دو مثلث ABC و ADC کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۲۳

۲) ۲۴

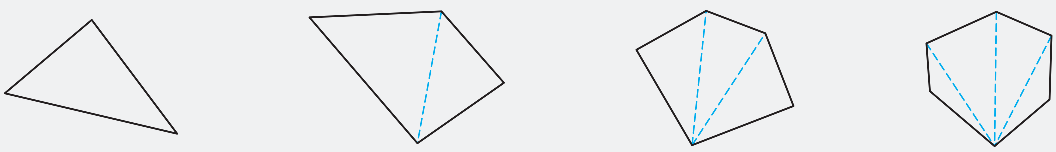
۳) ۲۶

۴) ۲۷

درسنامهٔ ۹

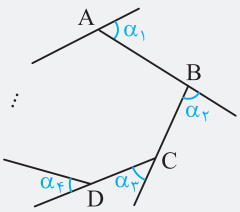
زاویه در n ضلعی‌ها

① مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابر $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ است.



۱۸۰° $۲\times ۱۸۰^\circ = ۳۶۰^\circ$ $۳\times ۱۸۰^\circ = ۵۴۰^\circ$ $۴\times ۱۸۰^\circ = ۷۲۰^\circ$

② مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب برابر ۳۶۰° است. زیرا:



$$\alpha_۱ + \hat{A} + \alpha_۲ + \hat{B} + \alpha_۳ + \hat{C} + \alpha_۴ + \hat{D} + \ldots = n\times ۱۸۰^\circ$$

$$\alpha_۱ + \alpha_۲ + \alpha_۳ + \alpha_۴ + \ldots + \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \ldots = n\times ۱۸۰^\circ$$

$$\alpha_۱ + \alpha_۲ + \alpha_۳ + \alpha_۴ + \ldots + (n-۲)\times ۱۸۰^\circ = n\times ۱۸۰^\circ$$

$$\alpha_۱ + \alpha_۲ + \alpha_۳ + \alpha_۴ + \ldots = n\times ۱۸۰^\circ - (n-۲)\times ۱۸۰^\circ = ۲\times ۱۸۰^\circ = ۳۶۰^\circ$$

③ چندضلعی محدبی که همهٔ اضلاعش با هم و همهٔ زوایایش با هم برابر باشند، منتظم نامیده می‌شود.

الف) اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی n ضلعی منتظم برابر است با:

$$\text{زاویهٔ داخلی} = \frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n} = ۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{n}$$

ب) اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی n ضلعی منتظم برابر است با:

$$\text{زاویهٔ خارجی} = \frac{۳۶۰^\circ}{n}$$

۱۱۱- در کدام چندضلعی محدب، مجموع زوایای داخلی چهار برابر مجموع زوایای خارجی است؟

۱) هشت‌ضلعی ۲) دوازده‌ضلعی ۳) ده‌ضلعی ۴) چهارده‌ضلعی

۱۱۲- مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی محدب بدون یکی از آن‌ها برابر ۲۵۷۰° است. اندازهٔ زاویهٔ کنار گذاشته‌شده کدام است؟

۱) ۹۰° ۲) ۱۰۵° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۳۰°

۱۱۳- اندازهٔ زاویهٔ داخلی کدام‌یک از n ضلعی‌های منتظم زیر بزرگ‌تر است؟

۱) ۱۰ ضلعی ۲) ۹ ضلعی ۳) ۷ ضلعی ۴) ۵ ضلعی

۱۱۴- اگر اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک n ضلعی منتظم، فقط ۲ درجه کم‌تر از اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک $(n+۲)$ ضلعی منتظم باشد، n کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

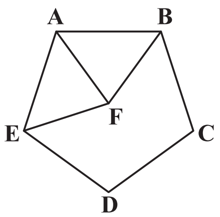
۱۱۵- یک نُه‌ضلعی محدب، حداکثر چند زاویهٔ حادهٔ داخلی می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۶- اندازهٔ زاویهٔ بین دو قطر یک پنج‌ضلعی منتظم که از یک رأس می‌گذرند، کدام است؟

۱) ۲۴° ۲) ۳۰° ۳) ۳۶° ۴) ۴۵°

۱۱۷- در شکل مقابل، ABCDE پنج‌ضلعی منتظم و مثلث ABF متساوی‌الاضلاع است. اندازهٔ زاویهٔ DEF کدام است؟



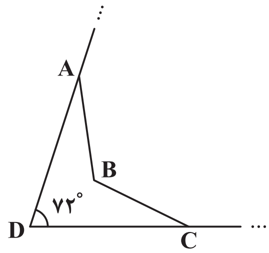
۱) ۳۶°

۲) ۴۲°

۳) ۵۴°

۴) ۶۶°

۱۱۸- در شکل مقابل، $ABC\cdots$ قسمتی از یک n ضلعی منتظم است. n کدام است؟



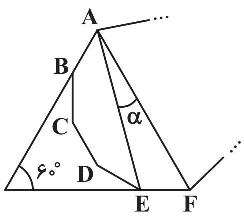
۱) ۹

۲) ۱۰

۳) ۱۱

۴) ۱۲

۱۱۹- در شکل مقابل، $ABCDEF\cdots$ قسمتی از یک n ضلعی منتظم است. مقدار α کدام است؟



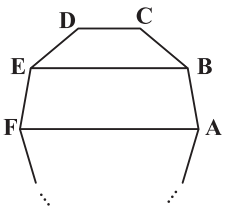
۱) ۱۵°

۲) ۱۸°

۳) ۲۰°

۴) ۱۲°

۱۲۰- در شکل مقابل، $ABCDEF\cdots$ قسمتی از یک n ضلعی منتظم است. اگر $D\hat{E}B = ۴۰^\circ$ باشد، زاویهٔ EFA چند درجه است؟



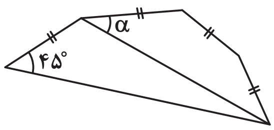
۱) ۷۵

۲) ۷۰

۳) ۸۰

۴) ۶۰

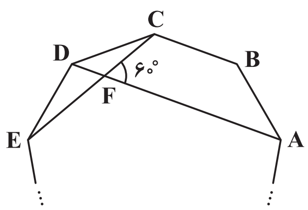
۱۲۱- در پنج‌ضلعی شکل مقابل، مقدار α کدام است؟



۱) ۳۵° ۲) ۳۰°

۳) ۴۰° ۴) $۲۲/۵^\circ$

۱۲۲- در شکل مقابل، A، B، C، D و E رأس‌های یک n ضلعی منتظم هستند. n کدام است؟



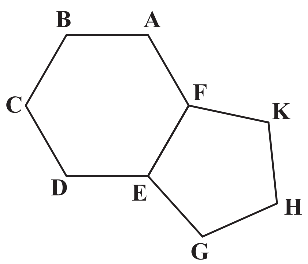
۱) ۹

۲) ۱۲

۳) ۱۱

۴) ۱۴

۱۲۳- در شکل مقابل، یک پنج‌ضلعی منتظم و یک شش‌ضلعی منتظم در یک ضلع مشترک‌اند. زاویهٔ AKF چند درجه است؟



۱) ۱۸

۲) ۲۰

۳) ۲۴

۴) ۳۰

درسنامهٔ ۱۰

روش‌های استدلال

استدلال استقرایی: روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است.

استدلال استنتاجی: روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

نکته: نتیجه‌ای که از استدلال استقرایی به‌دست می‌آید، ممکن است نادرست باشد، اما نتیجهٔ حاصل از استدلال استنتاجی صددرصد درست است.

گزاره: جمله‌ای خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد اما نه هر دو. دقت کنید که ممکن است درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد. گزاره‌ها به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌شوند:

الف) گزارهٔ ساده: فقط یک خبر را اعلام می‌کند.

ب) گزارهٔ مرکب: ترکیبی از چند گزارهٔ ساده است.

نقیض گزاره: نقیض یک گزاره درواقع تکذیب آن گزاره است. اگر ارزش گزاره‌ای درست باشد، ارزش نقیض آن نادرست است و بالعکس.

گزارهٔ شرطی: خبر اعلامی توسط گزاره با یک شرط بیان می‌شود و به فرم «اگر ......، آن‌گاه ....» می‌باشد.

قضیه: اگر ارزش یک گزاره همواره درست باشد به آن قضیه می‌گوییم.

فرض و حکم قضیه: در یک قضیه، گزاره یا گزاره‌هایی که درستی آن‌ها را قبول داریم، «فرض قضیه» و گزاره یا گزاره‌هایی که می‌خواهیم درستی آن‌ها را از روی فرض، نتیجه بگیریم «حکم قضیه» می‌باشند.

عکس قضیه: اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم، عکس آن قضیه به‌دست می‌آید که ممکن است ارزش آن درست یا نادرست باشد.

قضیهٔ دوشرطی: اگر ارزش عکس یک قضیه درست باشد یعنی عکس قضیه خود یک قضیه باشد، آن‌گاه می‌توان این دو قضیه را در قالب یک قضیهٔ دوشرطی بیان کرد. قضیهٔ دوشرطی را به‌صورت «$p \Leftrightarrow q$» نشان می‌دهند و به شکل «p اگر و تنها اگر q» می‌خوانند.

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی نادرست است، مثال نقض گویند.

بعضی از روش‌های اثبات قضایا:

۱- اثبات مستقیم: در این روش از فرض قضیه، درستی حکم را نتیجه می‌گیریم.

۲- برهان خلف (اثبات غیرمستقیم): در این روش به‌جای آن‌که نشان دهیم حکم درست است، نشان می‌دهیم حکم نادرست نیست، به این‌صورت که فرض می‌کنیم حکم نادرست است، آن‌گاه به یک تناقض می‌رسیم.

۱۲۴- کدام گزینه یک گزاره است؟

۱) او بازیکن فوتبال است.
۲) به‌به چه طبیعت زیبایی.
۳) چرا هندسه نمی‌خوانید؟
۴) مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است.

۱۲۵- کدام گزینه نادرست است؟

۱) گزارهٔ «a از b کوچک‌تر است.» نقیض گزارهٔ «a از b بزرگ‌تر است.» می‌باشد.
۲) عبارت $۲ < ۳$ می‌باشد، یک گزارهٔ ساده است.
۳) عبارت $x + ۳ = ۰$ گزاره نیست.
۴) «اگر باران ببارد، مسابقه برگزار نخواهد شد.» یک گزارهٔ شرطی است.

۱۲۶- نقیض گزارهٔ «اگر باران نبارد، مسابقه برگزار خواهد شد» کدام است؟

۱) اگر باران ببارد، مسابقه برگزار نخواهد شد.
۲) اگر باران نبارد، مسابقه برگزار نخواهد شد.
۳) اگر باران ببارد، مسابقه برگزار خواهد شد.
۴) اگر باران نبارد، مسابقه برگزار خواهد شد.

۱۲۷- کدام گزینه، مثال نقض دارد؟

۱) هر مربع، یک لوزی است.
۲) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.
۳) دو مثلث هم‌مساحت، هم‌نهشت هستند.
۴) نقطهٔ همرسی نیمسازهای هر مثلث، داخل آن است.

۱۲۸- کدام گزینه، مثال نقض ندارد؟

۱) برای هر دو مجموعهٔ A و B یا A زیرمجموعهٔ B است یا B زیرمجموعهٔ A می‌باشد.
۲) در هر مثلث اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه کوچک‌تر است.
۳) هر چهارضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.
۴) اگر دو دایره مساحت‌های برابر داشته باشند، آن‌گاه شعاع‌های برابر دارند.

۱۲۹- کدام گزینهٔ زیر با برهان خلف ثابت نمی‌شود؟

۱) خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۲) اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

۳) از نقطه‌ای غیر واقع بر خط، نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن رسم کرد.

۴) مجموع زوایای داخلی هر nضلعی محدب برابر $(n-2)\times 180^\circ$ می‌باشد.

۱۳۰- برای اثبات قضیهٔ «در مثلث ABC اگر $\hat{A} > \hat{B}$ باشد، آن‌گاه $BC > AC$ است.» به روش برهان خلف، فرض خلف کدام است؟

۱) $\hat{A} = \hat{B}$ یا $\hat{A} < \hat{B}$

۲) $\hat{A} > \hat{B}$

۳) $BC < AC$

۴) $BC \le AC$

۱۳۱- کدام گزینه یک قضیه است؟

۱) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۲) اگر یک چهارضلعی، دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داشته باشد، آن‌گاه متوازی‌الاضلاع است.

۳) اگر میانهٔ یک مثلث نصف یک ضلع آن باشد، آن‌گاه مثلث قائم‌الزاویه است.

۴) مثلثی که دو ارتفاع مساوی داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

۱۳۲- کدام قضیه به‌صورت قضیهٔ دو شرطی بیان نمی‌شود؟

۱) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

۲) هر مثلث با سه ضلع برابر، سه زاویهٔ برابر دارد.

۳) در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.

۴) در هر مثلث ضلع مقابل به زاویهٔ 90°، بزرگ‌ترین ضلع است.

۱۳۳- کدام قضیه به‌صورت دو شرطی بیان نمی‌شود؟

۱) در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانهٔ یک ضلع بر هم منطبق‌اند.

۲) در مثلث قائم‌الزاویه، عمودمنصف‌های اضلاع بر روی ضلع بزرگ‌تر متقاطع‌اند.

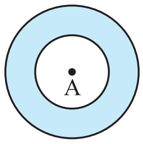
۳) در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است.

۴) در هر مستطیل، قطرها با هم برابرند.

یادداشت

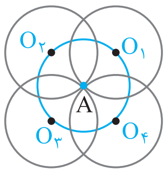
پاسخ‌های تشریحی

۱ ۲ نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از A بیشتر از ۳ است، خارج دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ می‌باشند. همچنین نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از A کم‌تر از ۵ است، درون دایره به مرکز A و شعاع ۵ قرار دارند. پس اشتراک این دو ناحیه به‌صورت ناحیهٔ رنگی مقابل می‌باشد که مساحت آن برابر است با:

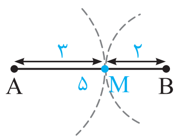


$$S_{\text{رنگی}} = \pi(۵)^۲ - \pi(۳)^۲ = ۲۵\pi - ۹\pi = ۱۶\pi$$

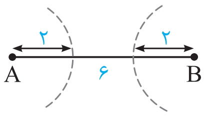
۲ ۳ مرکز هر دایره به شعاع ۲ که از نقطهٔ A می‌گذرد، به فاصلهٔ ۲ از نقطهٔ A قرار دارد. واضح است تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۲ از نقطهٔ A می‌باشند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ هستند. در شکل مقابل O_1، O_2، O_3 و O_4 مرکز دایره‌هایی به شعاع ۲ و گذرا از A می‌باشند که همهٔ مرکزها روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ (دایرهٔ آبی) قرار دارند.



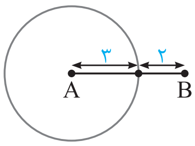
۳ ۱ کافی است یک‌بار به مرکز A و به شعاع ۳ و بار دیگر به مرکز B و شعاع ۲ دایره‌ای رسم کنیم. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید فقط نقطهٔ M روی هر دو دایره قرار دارد. پس فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد.



۴ ۲ نقاطی که به فاصلهٔ ۲ واحد از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ واقع‌اند. همچنین نقاطی که به فاصلهٔ ۲ واحد از نقطهٔ B قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲ می‌باشند. واضح است که این دو دایره همدیگر را قطع نمی‌کنند، پس هیچ نقطه‌ای با شرایط گفته شده وجود ندارد.

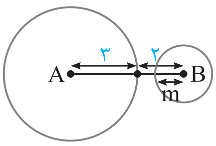


۵ ۳ دو نقطهٔ M و M′ حتماً روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ قرار دارند. از طرفی این دو نقطه باید روی دایره‌ای به مرکز B و به شعاع m قرار داشته باشند.

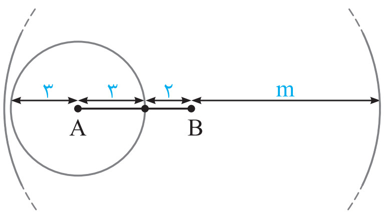


در دو حالت زیر، دایره به مرکز B، دایره به مرکز A را قطع نمی‌کند.

حالت اول: وقتی $m < ۲$ باشد:

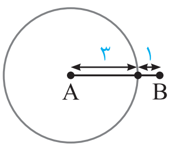


حالت دوم: وقتی $m > ۸$ باشد:

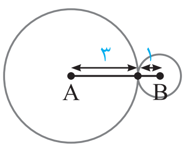


بنابراین اگر $۲ < m < ۸$ باشد، این دو دایره همدیگر را در دو نقطهٔ M و M′ قطع می‌کنند، پس ۵ مقدار صحیح برای m وجود دارد. دقت کنید در حالت $m = ۲$ و $m = ۸$ دو دایره بر هم مماس شده و فقط یک نقطه یافت می‌شود.

۶ ۴ همهٔ نقاطی که به فاصلهٔ ۳ از A قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ می‌باشند. از طرفی تمام نقاطی که به فاصلهٔ $۲a - ۱$ از B قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع $۲a - ۱$ واقع‌اند. در دو حالت زیر این دو دایره فقط یک نقطهٔ مشترک خواهند داشت:

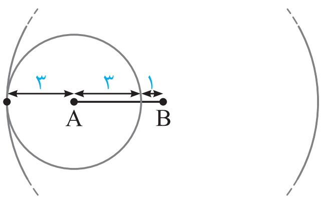


حالت اول:



$$\Rightarrow ۲a - ۱ = ۱ \Rightarrow ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱$$

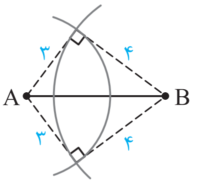
حالت دوم:

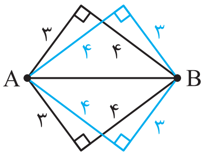


$$\Rightarrow ۲a - ۱ = ۷ \Rightarrow ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$$

بنابراین به ازای $a = ۱$ و $a = ۴$ فقط یک نقطه یافت می‌شود.

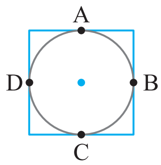
۷ **۳** ابتدا فرض می‌کنیم دنبال نقاطی هستیم که از A به فاصلهٔ ۳ و از B به فاصلهٔ ۴ می‌باشند. بنابراین دو نقطه با این ویژگی‌ها در صفحه معلوم می‌شود که شکل حاصل از وصل کردن این نقاط به A و B دو مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۳، ۴ و ۵ می‌باشند. حال ممکن است دو نقطه‌ای که پیدا می‌شوند به فاصلهٔ ۳ از B و به فاصلهٔ ۴ از A باشند، پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر با طول اضلاع ۳، ۴ و ۵ نیز داریم. بنابراین مجموع مساحت چهار مثلث برابر است با:





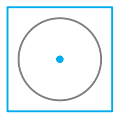
$$S = ۴ \times (\frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴) = ۲۴$$

۸ **۲** می‌دانیم تمام نقاطی که به فاصلهٔ معلوم L از مرکز مربع هستند، روی دایره‌ای قرار دارند که مرکز آن، همان مرکز مربع و شعاع آن L می‌باشد. با توجه به L و طول نصف قطر مربع و نصف ضلع مربع، حالات زیر را داریم:



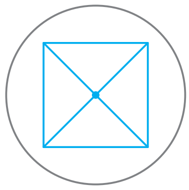
نصف ضلع $= L$

۴ نقطه $\Leftarrow$



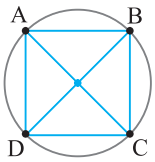
نصف ضلع $< L$

هیچ نقطه $\Leftarrow$



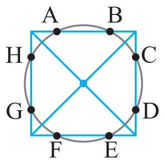
نصف قطر $< L$

صفر نقطه $\Leftarrow$



نصف قطر $= L$

۴ نقطه $\Leftarrow$

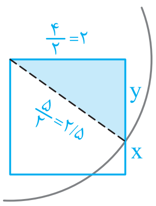


نصف قطر $> L$

۸ نقطه $\Leftarrow$

بنابراین با توجه به توضیحات فوق، m می‌تواند ۸ باشد.

۹ **۲** برای پیدا کردن دو نقطهٔ مطلوب، کافی است به مرکز رأس مربع و شعاع ۲/۵ یک دایره رسم کنیم. با توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی، $y = \frac{۳}{۲}$ خواهد بود. توجه کنید که اعداد ۳، ۴ و ۵ فیثاغورسی هستند، پس هر مضربی از آن‌ها یعنی $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۴}{۲}$ و $\frac{۵}{۲}$ نیز فیثاغورسی می‌باشند. حال برای به‌دست آوردن فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس تا یکی از این نقاط داریم:

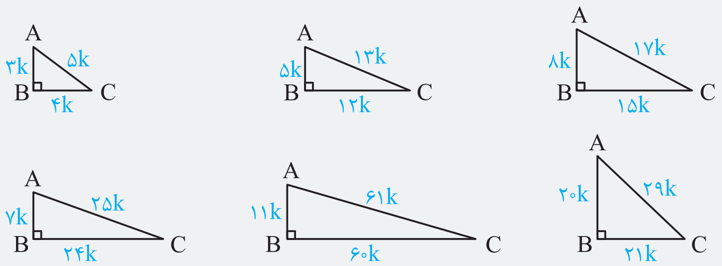


$$x = ۲ - y \Rightarrow x = ۲ - \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

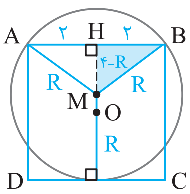
نیم‌نگاه

به اعداد a، b و c که در رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ صدق می‌کنند، اعداد فیثاغورسی می‌گویند. در واقع این اعداد، اضلاع مثلث قائم‌الزاویه می‌باشند.

نکته: اگر a، b و c اعداد فیثاغورسی باشند، هر مضربی از آن‌ها نیز فیثاغورسی است.



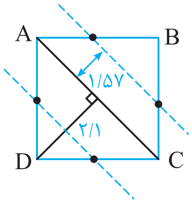
۱۰ **۱** می‌دانیم این سه نقطه روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع R قرار دارند. با توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ MBH داریم:



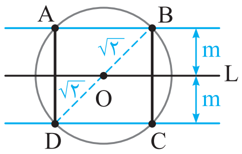
$$R^۲ = ۲^۲ + (۴ - R)^۲ \Rightarrow \cancel{R^۲} = ۴ + ۱۶ + \cancel{R^۲} - ۸R \Rightarrow ۸R = ۲۰ \Rightarrow R = ۲/۵$$

حال فاصلهٔ M تا نقطهٔ O مرکز مربع برابر است با:

$$OM = OH - MH \Rightarrow OM = ۲ - (۴ - R) = ۲ - (۴ - ۲/۵) = ۰/۵$$



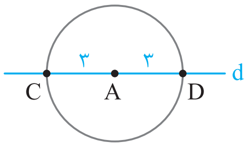
۱۱ **۱** نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ $۱/۵۷ \simeq \frac{۳/۱۴}{۲} \simeq \frac{\pi}{۲}$ از قطر (خط) AC هستند، دو خط موازی آن و به فاصلهٔ ۱/۵۷ از آن می‌باشند. از طرفی، قطر مربع به ضلع ۳ برابر $۳\sqrt{۲}$ و نصف قطر آن $۲/۱ \simeq \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ است. پس این دو خط، محیط مربع را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.

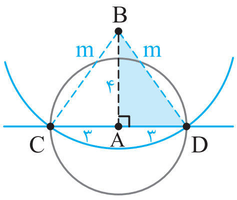


۱۲ **۴** نقاطی که به فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ از نقطهٔ O قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{۲}$ قرار دارند. از طرفی نقاطی که به فاصلهٔ m از خط L هستند روی دو خط به موازات L و به فاصلهٔ m از آن می‌باشند. چون ۴ نقطه وجود دارند که هر دو ویژگی را دارا می‌باشند (هر مربع دارای ۴ رأس می‌باشد) پس نحوهٔ قرارگیری آن‌ها به‌صورت مقابل است:

با توجه به شکل، طول قطر مربع برابر $۲\sqrt{۲}$ می‌باشد. پس طول هر ضلع آن ۲ بوده و داریم:

$$۲m = ۲ \Rightarrow m = ۱$$



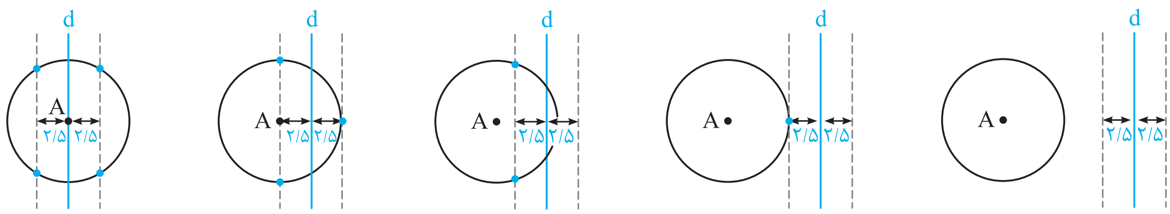


۱۳ **۳** نقاط C و D روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ قرار دارند. از آن‌جایی که نقاط C و D روی خط d نیز هستند، پس به‌صورت شکل مقابل می‌باشند:

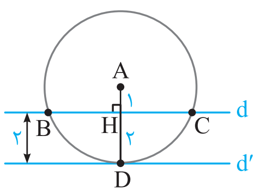
حال چون همین دو نقطهٔ C و D بـه فاصلهٔ m از نقطهٔ B هستند، پس باید دایره به مرکز B و شعاع m نیز از نقاط C و D بگذرد. بنابراین به ناچار نقطهٔ B دقیقاً بالای (پایین) نقطهٔ A و به فاصلهٔ ۴ از آن قرار دارد[1]. حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ BAD، اندازهٔ m برابر ۵ می‌باشد، زیرا اعداد ۳، ۴ و ۵ اعداد فیثاغورسی هستند یا می‌توان گفت:

$$AD^۲ + AB^۲ = BD^۲ \Rightarrow ۹ + ۱۶ = BD^۲ \Rightarrow BD = m = ۵$$

۱۴ **۴** نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۲/۵ هستند، روی دو خط به موازات d و به فاصلهٔ ۲/۵ در طرفین آن می‌باشند. از طرفی، نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ هستند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۵ می‌باشند. با توجه به وضعیت نقطهٔ A و خط d یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:



صفر نقطهٔ تلاقی — یک نقطهٔ تلاقی — دو نقطهٔ تلاقی — سه نقطهٔ تلاقی — چهار نقطهٔ تلاقی

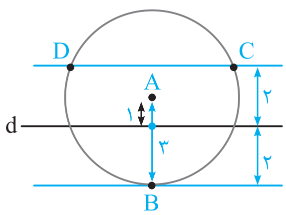


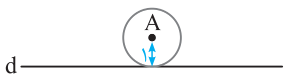
۱۵ **۳** تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۳ از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ می‌باشند. حال این دایره باید با این دو خط در سه نقطه مشترک باشد، پس نحوهٔ قرارگیری آن‌ها به‌صورت مقابل است.

بنابراین داریم:

$$\text{مجموع فاصله‌های A از دو خط} = AH + AD = ۱ + ۳ = ۴$$

دقت کنید با توجه به این‌که فاصلهٔ دو خط از هم برابر ۲ و فاصلهٔ ۳ نقطه از نقطهٔ A برابر ۳ می‌باشد، نقطهٔ A نمی‌تواند بین دو خط قرار داشته باشد.





۱۶ **۱** نقاطی که به فاصلهٔ ۳ از نقطهٔ A هستند روی دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز A قرار دارند. از طرفی، نقاطی که به فاصلهٔ ۲ از خط d هستند روی دو خط موازی خط d و به فاصلهٔ ۲ از d می‌باشند. حال اشتراک این دو خط و دایره باید سه نقطه باشد. بنابراین نحوهٔ قرارگیری آن‌ها به‌صورت مقابل است.
همان‌طور که در شکل می‌بینید فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر ۱ است. پس یک نقطه روی خط d وجود دارد که به فاصلهٔ ۱ از نقطهٔ A می‌باشد.

---

[1] در ادامهٔ همین فصل خواهیم دید که در حقیقت نقطهٔ B روی عمودمنصف پاره‌خط CD قرار دارد.

۱۷ | **۳**

نیم‌نگاه

برای رسم یک مثلث نیاز به معلوم بودن سه جزء مستقل از هم است و چنان‌چه مثلث ویژگی‌هایی خاص داشته باشد، به تعداد این ویژگی‌های خاص می‌توان از تعداد داده‌های موردنیاز برای رسم کم کرد. مثلاً در مثلث قائم‌الزاویه اگر دو جزء مشخص باشد، جزء سوم هم مشخص می‌شود. چون در واقع همین‌که می‌دانیم یکی از زاویه‌ها ۹۰° است، خود یکی از معلومات است.

با توجه به این توضیحات سراغ گزینه‌ها می‌رویم. چون در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است، پس داشتن وتر و میانهٔ وارد بر وتر در واقع یک داده محسوب می‌شود و دو جزء مستقل از هم نیستند.

۱۸ | **۱**

چون اندازه‌های داده شده برای اضلاع مثلث همگی معلوم هستند، فقط باید بررسی کنیم که بزرگ‌ترین عدد از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد. بنابراین داریم:

۱) $۵+۳>۷$ ۲) $۳+۲\not>۶$ ۳) $۱+۲\not>۳$ ۴) $۱+۳\not>۴$

۱۹ | **۲**

نیم‌نگاه

با توجه به روابط $a<b+c$، $b<a+c$، $c<a+b$ در هر مثلث می‌توان گفت که:

$$|b-c|<a<b+c \quad \text{یا} \quad |a-c|<b<a+c \quad \text{یا} \quad |a-b|<c<a+b$$

حال اگر یکی یا دوتا از اندازه‌های داده شده برای اضلاع مثلث مجهول باشد، برای این‌که حدود پارامتر را طوری تعیین کنیم تا مثلث قابل رسم باشد کافی است اندازهٔ ضلع مجهول را بین تفاضل و مجموع دو ضلع معلوم قرار دهیم. توجه کنید حل این نامساوی معادل با حل سه نامساوی $a<b+c$، $b<a+c$ و $c<a+b$ می‌باشد.

$$BC=a \Rightarrow |b-c|<a<b+c \xrightarrow[c=۵]{b=۱۲} |۱۲-۵|<a<۱۲+۵ \Rightarrow ۷<a<۱۷$$

۲۰ | **۳**

با توجه به رابطهٔ $|b-c|<a<b+c$ می‌توان نوشت:

$$|۲x-(x-۱)|<۱۷<۲x+(x-۱) \Rightarrow |x+۱|<۱۷<۳x-۱ \Rightarrow \begin{cases} x>-۱۸ \\ x<۱۶ \\ x>۶ \end{cases} \Rightarrow ۶<x<۱۶ \Rightarrow \text{۹ مقدار}$$

۲۱ | **۲**

ابتدا به کمک نامساوی زیر حدود x را پیدا می‌کنیم:

$$۶-۳/۵<۵x+۱<۶+۳/۵ \Rightarrow ۲/۵<۵x+۱<۹/۵ \Rightarrow ۱/۵<۵x<۸/۵ \Rightarrow ۰/۳<x<۱/۷$$

از طرفی مقدار محیط باید عددی صحیح باشد، پس داریم:

$$\text{محیط}=۳/۵+۶+۵x+۱=۵x+۱۰/۵ \xrightarrow{۰/۳<x<۱/۷} ۱۲<۵x+۱۰/۵<۱۹ \Rightarrow \begin{cases} \text{Max (محیط)}=۱۸ \\ \text{Min (محیط)}=۱۳ \end{cases}$$

۲۲ | **۲**

باید اضلاع مثلث در نامساوی زیر صدق کنند:

$$۵-۲<۲x-۱<۵+۲ \Rightarrow ۳<۲x-۱<۷ \Rightarrow ۴<۲x<۸ \Rightarrow ۲<x<۴$$

چون x عددی صحیح می‌باشد، پس $x=۳$ قابل قبول است. بنابراین طول ضلع مجهول برابر $۲x-۱=۵$ می‌شود. پس اضلاع مثلث ۲، ۵ و ۵ می‌باشند، در نتیجه یک مثلث متساوی‌الساقین است.

۲۳ | **۱**

نیم‌نگاه

اگر سه تا از اندازه‌های داده شده برای اضلاع مثلث مجهول باشند، برای تعیین حدود پارامتر به منظور آن‌که مثلث با اندازه‌های داده شده قابل رسم باشد باید اندازه‌های داده شده را در هر سه نامساوی $a<b+c$، $b<a+c$ و $c<a+b$ قرار دهیم و سپس با اشتراک‌گیری از جواب‌های به‌دست آمده حدود پارامتر را تعیین کنیم.

چون طول سه پاره‌خط داده شده پارامتری هستند، پس باید مجموع هر دو ضلع دلخواه بزرگ‌تر از ضلع سوم باشد:

$$\begin{cases} (۴x-۴)+(x+۷)>۶x \Rightarrow x<۳ \\ (۴x-۴)+(۶x)>x+۷ \Rightarrow x>\frac{۱۱}{۹} \\ (x+۷)+(۶x)>۴x-۴ \Rightarrow x>-\frac{۱۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۱}{۹}<x<۳$$

۲۴ | **۴**

اضلاع مثلث باید در سه نامساوی زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} ۴x-۳<(x+۱)+(۲x+۴) \Rightarrow ۴x-۳<۳x+۵ \Rightarrow x<۸ \\ ۲x+۴<(x+۱)+(۴x-۳) \Rightarrow ۲x+۴<۵x-۲ \Rightarrow x>۲ \\ x+۱<(۲x+۴)+(۴x-۳) \Rightarrow x+۱<۶x+۱ \Rightarrow x>۰ \end{cases} \Rightarrow ۲<x<۸ \Rightarrow \alpha=۲, \beta=۸ \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha}=\frac{۸}{۲}=۴$$

۲۵ **۱** ابتدا حدود x را برای این که مثلث ABC قابل رسم باشد، تعیین می‌کنیم:

$$|(۴x-۱)-(۲x+۳)|<۸<(۴x-۱)+(۲x+۳) \Rightarrow \begin{cases} |۲x-۴|<۸ \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۴<۸ \Rightarrow x<۶ \\ -۲x+۴<۸ \Rightarrow -۲<x \end{cases} \\ ۸<۶x+۲ \Rightarrow ۱<x \end{cases}$$

از اشتراک روابط بالا داریم: $۱<x<۶$ (I). حال باید حدود x را برای قابل رسم بودن مثلث $A'B'C'$ تعیین کنیم:

$$|(۳x-۲)-(۲x+۵)|<۴<(۳x-۲)+(۲x+۵) \Rightarrow \begin{cases} |x-۷|<۴ \Rightarrow \begin{cases} x-۷<۴ \Rightarrow x<۱۱ \\ ۷-x<۴ \Rightarrow ۳<x \end{cases} \\ ۴<۵x+۳ \Rightarrow \frac{۱}{۵}<x \end{cases}$$

از اشتراک روابط بالا نیز داریم: $۳<x<۱۱$ (II). پس طبق $(I)\bigcap(II)$ برای قابل رسم بودن هر دو مثلث باید داشته باشیم: $۳<x<۶$.

چون x باید عددی صحیح باشد، تنها جواب‌ها $x=۴$ و $x=۵$ می‌باشند.

۲۶ **۳**

نیم‌نگاه

اگر a، b و c اضلاع یک مثلث باشند به طوری که $a \ge b \ge c$، آنگاه a بزرگ‌ترین ضلع مثلث در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} a \ge b \\ a \ge c \end{cases} \xrightarrow{+} ۲a \ge b+c \xrightarrow{+a} ۳a \ge \underbrace{a+b+c}_{\text{محیط}} \Rightarrow a \ge \frac{\text{محیط}}{۳}$$

$$a<b+c \xrightarrow{+a} ۲a<\underbrace{a+b+c}_{\text{محیط}} \Rightarrow a<\frac{\text{محیط}}{۲}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\text{محیط}}{۳} \le a < \frac{\text{محیط}}{۲}}$$

با توجه به توضیحات بالا داریم:

$$\frac{۲۴}{۳} \le \text{بزرگ‌ترین ضلع} < \frac{۲۴}{۲} \Rightarrow ۸ \le \text{بزرگ‌ترین ضلع} < ۱۲ \Rightarrow$$ با توجه به گزینه‌ها، بزرگ‌ترین ضلع ۱۳ نیست.

۲۷ **۳**

نیم‌نگاه

در مثلث متساوی‌الساقین با اضلاع a، b و b داریم:

$$a+b+b=\text{محیط} \Rightarrow a=\text{محیط}-۲b>۰ \Rightarrow ۲b<\text{محیط} \Rightarrow b<\frac{\text{محیط}}{۲}$$

$$b+b>a \Rightarrow ۲b>a \xrightarrow{+۲b} ۲b+۲b>\underbrace{a+۲b}_{\text{محیط}} \Rightarrow ۴b>\text{محیط} \Rightarrow b>\frac{\text{محیط}}{۴}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\text{محیط}}{۴} < b < \frac{\text{محیط}}{۲}}$$

با توجه به مطالب فوق داریم:

$$\frac{۱۶}{۴}<b<\frac{۱۶}{۲} \Rightarrow ۴<b<۸ \Rightarrow$$ ۳ مقدار صحیح برای b وجود دارد.

۲۸ **۳** با فرض $BD=x$ در مثلث BAD داریم:

$$۸-۶<x<۸+۶ \Rightarrow ۲<x<۱۴$$

همچنین در مثلث BCD نیز داریم:

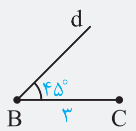
$$۱۰-۷<x<۱۰+۷ \Rightarrow ۳<x<۱۷$$

بنابراین $۳<x<۱۴$ می‌تواند باشد و در نتیجه ۱۰ مقدار صحیح می‌تواند اختیار کند.

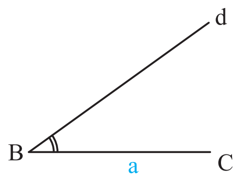
۲۹ **۴**

نیم‌نگاه

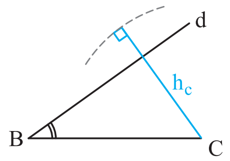
در رسم مثلث به کمک خط‌کش و پرگار، اضلاع و زوایایی که اندازهٔ آن‌ها مشخص است برای ما قابل رسم هستند. مثلاً اگر در مثلث ABC طول ضلع BC برابر ۳ و زاویهٔ B برابر ۴۵° باشد، ابتدا پاره‌خط $BC=۳$ را رسم کرده و سپس در رأس B خط d را طوری رسم می‌کنیم تا زاویهٔ B برابر ۴۵° شود.

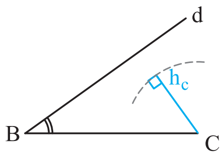


ابتدا ضلع $BC=a$ را رسم می‌کنیم. سپس در نقطهٔ B خط d را طوری رسم می‌کنیم تا با ضلع $BC=a$ زاویهٔ B را بسازد.

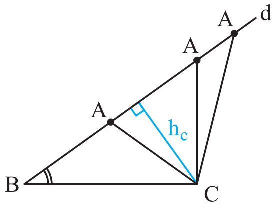


حال اگر فاصلهٔ C از خط d کم‌تر و یا بیشتر از h_c باشد، هیچ مثلثی نمی‌توان رسم کرد.

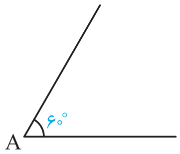


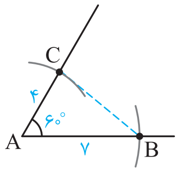


اما اگر فاصلهٔ C از خط d برابر h_c باشد، بی‌شمار مثلث می‌توان رسم کرد. به این‌ترتیب که رأس A را هر کجای خط d درنظر بگیریم، مثلث ABC مثلث مطلوب است.



۳۰ ۲ چون از مثلث ABC دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها مشخص است (یکی از حالت‌های همنهشتی)، پس تنها یک مثلث منحصربه‌فرد با این داده‌ها قابل رسم است که طریقهٔ رسم به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:

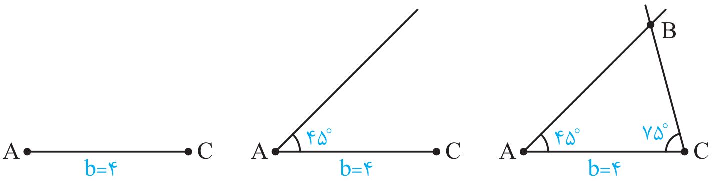




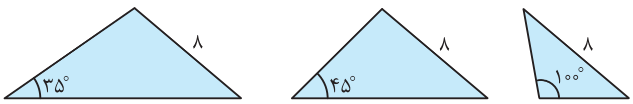
۳۱ ۲ چون دو زاویه از مثلث مشخص است، پس زاویهٔ سوم نیز به‌راحتی معلوم می‌شود:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+۶۰^\circ+۷۵^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۴۵^\circ$$

بنابراین دو زاویهٔ $\hat{A}$ و $\hat{C}$ و ضلع بین آن‌ها یعنی b از مثلث معلوم است (یکی از حالت‌های همنهشتی)، پس تنها یک مثلث منحصربه‌فرد با این داده‌ها قابل رسم است که طریقهٔ رسم به‌صورت زیر می‌باشد:



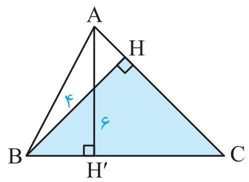
۳۲ ۴ چون دو زاویه و ضلع داده‌شده نام مشخصی ندارند، پس ضلع به طول ۸ می‌تواند روبه‌روی هر کدام از سه زاویهٔ ۳۵°، ۴۵° و ۱۰۰° باشد، پس سه مثلث غیرهم‌نهشت می‌توان رسم کرد:



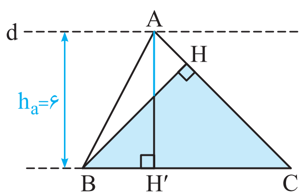
توجه کنید سه مثلثی که رسم می‌شوند متشابه هستند.

۳۳ ۱ چون $AB=AC$ و $\hat{B}=۴۵^\circ$ می‌باشد، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین و $\hat{C}=۴۵^\circ$ می‌باشد. در نتیجه $\hat{A}=۹۰^\circ$ است. بنابراین با این معلومات یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌توان رسم کرد.

۳۴ ۱ فرض می‌کنیم مثلث ABC به‌صورت مقابل باشد:



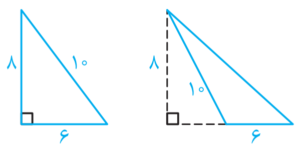
مثلث BHC با معلوم بودن وتر و یک ضلع، قابل رسم است. خط d را به موازات BC و به فاصلهٔ ۶ واحد از آن رسم می‌کنیم. محل تلاقی امتداد CH و خط d نقطهٔ A را معلوم می‌کند. مثلث ABC تنها جواب مسأله است.



۳۵ ۳ چون h_a از b و c کوچک‌تر است، دو مثلث قابل رسم است. یکی حاده‌الزاویه و دیگری منفرجه‌الزاویه.

۳۶ ۱ در هر مثلث ارتفاع نظیر یک ضلع، از دو ضلع دیگر بزرگ‌تر نیست. در این سؤال چون $h_c > b$ می‌باشد، مسألهٔ جواب ندارد.

۳۷ ۳ از آن‌جایی که ارتفاع وارد بر یک ضلع مثلث نمی‌تواند از دو ضلع دیگر آن بزرگ‌تر باشد، پس ارتفاع نظیر ضلع سوم، در مثلث به اضلاع ۱۰ و ۶ نمی‌تواند ۸ باشد. همچنین ارتفاع نظیر ضلع ۱۰ نیز نمی‌تواند ۸ باشد. اما ارتفاع نظیر ضلع ۶ می‌تواند برابر ۸ باشد. در این حالت، دو مثلث یکی قائم‌الزاویه و دیگری منفرجه‌الزاویه قابل رسم است.



۳۸ ۱ با معلومات b، c و h_a زمانی مثلث قائم‌الزاویه حاصل می‌شود که اولاً دو ضلع b و c با هم برابر نباشند و ثانیاً ارتفاع، برابر یکی از اضلاع باشد، پس دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $h_a = b$ و $b \neq c$:

$$h_a = b \Rightarrow ۲x + ۳ = x + ۶ \Rightarrow x = ۳$$

$$x = ۳ \Rightarrow \begin{cases} b = x + ۶ = ۹ \\ c = ۲x + ۵ = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow b \neq c$$

بنابراین در این حالت، طول وتر برابر ۱۱ می‌باشد.

حالت دوم: $h_a = c$ و $b \neq c$:

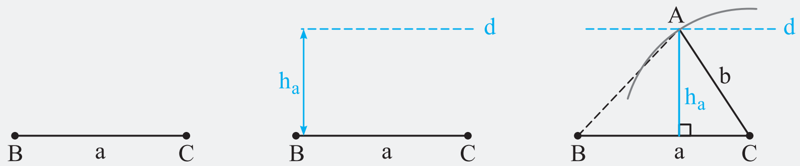
$h_a = c \Rightarrow ۲x + ۳ = ۲x + ۵ \Rightarrow$ امکان ندارد.

۳۹ ۳ h_a باید هم از $b = ۱۰$ و هم از $c = ۱۴$ کوچک‌تر باشد، پس $\text{Max}(h_a) = ۹$.

۴۰ ۳

نیم‌نگاه

با معلومات دو ضلع و ارتفاع وارد بر یکی از همان اضلاع (a، b و h_a) در صورتی‌که $h_a < b$ باشد، دو مثلث، اگر $h_a = b$ باشد یک مثلث و در غیر این‌صورت هیچ مثلثی قابل رسم نیست. نحوهٔ رسم به‌صورت زیر است:

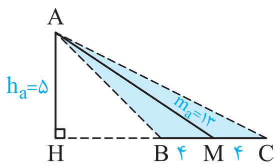


چون دو ضلع و ارتفاع وارد بر یکی از آن دو ضلع داده شده و تنها یک مثلث قابل رسم است، پس:

$$h_b = c \Rightarrow ۲x - ۳ = x + ۳ \Rightarrow x = ۶$$

۴۱ ۲ چون $h_a < m_a$ می‌باشد، بنابراین فقط یک مثلث قابل رسم است.

۴۲ ۱ چون $h_a < m_a$ می‌باشد، پس یک مثلث می‌توان رسم کرد که به‌صورت مقابل می‌باشد. بنابراین فاصلهٔ دورترین رأس از ارتفاع برابر است با:

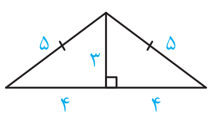


$$\overset{\Delta}{AHM}: AH^۲ + HM^۲ = AM^۲ \Rightarrow ۲۵ + HM^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow HM^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow HM = ۱۲$$

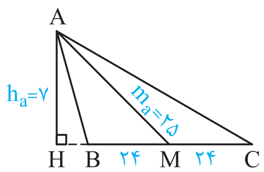
$\Rightarrow$ فاصلهٔ دورترین رأس از ارتفاع $= CH = CM + HM = ۴ + ۱۲ = ۱۶$

توجه کنید فاصلهٔ نقطه از خط، طول عمودی است که از نقطه بر خط وارد می‌شود که در این سؤال همان CH می‌باشد.

۴۳ ۳ چون $m_a = h_a$ می‌باشد، پس یک مثلث متساوی‌الساقین می‌توان رسم کرد که به‌صورت مقابل می‌باشد و طول ساق این مثلث برابر ۵ خواهد بود. پس نسبت ضلع بزرگ‌تر به کوچک‌تر برابر $\frac{۸}{۵} = ۱/۶$ می‌باشد.

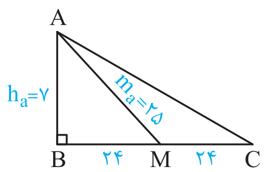


۴۴ ۱ چون $h_a < m_a$ می‌باشد، پس یک مثلث می‌توان رسم کرد. با توجه به شکل مقابل، به کمک فیثاغورس در مثلث AHM داریم:



$$AH^۲ + HM^۲ = AM^۲ \Rightarrow ۴۹ + HM^۲ = ۶۲۵ \Rightarrow HM^۲ = ۵۷۶ \Rightarrow HM = ۲۴$$

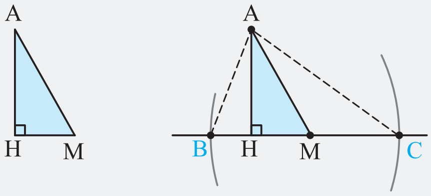
از آن‌جایی‌که $HM = BM = ۲۴$ می‌باشد، پس H بر B منطبق است و این یعنی ارتفاع مثلث ABC و ضلع AB بر هم منطبق هستند، پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است و به‌صورت مقابل می‌باشد:



۴۵ ۳

نیم‌نگاه

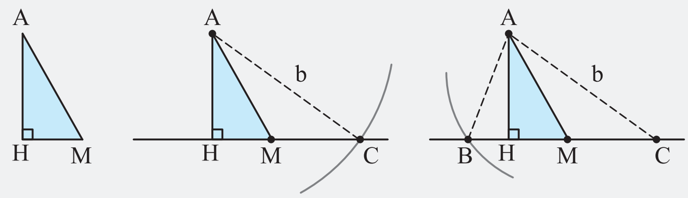
رسم مثلث با معلوم بودن یک ضلع و میانه و ارتفاع وارد بر آن ضلع



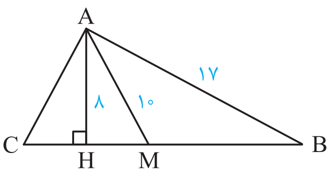
اگر a یک ضلع و h_a ارتفاع وارد بر آن و m_a میانهٔ نظیر همان ضلع باشد، در صورتی‌که $h_a < m_a$ باشد، یک مثلث و اگر $h_a = m_a$ باشد، یک مثلث متساوی‌الساقین می‌توان رسم کرد. اگر $h_a > m_a$ باشد، هیچ مثلثی وجود ندارد. طریقهٔ رسم به این‌صورت است که چون h_a و m_a معلوم هستند، پس می‌توان مثلث AHM را با دو ضلع معلوم رسم کرد. حال HM را امتداد داده و به مرکز M و شعاع $\frac{a}{2}$ دو کمان می‌زنیم تا B و C معلوم شوند.

نکته: اگر b یک ضلع، m_a و h_a میانه و ارتفاع وارد بر ضلع a باشند که هیچ اطلاعاتی در مورد a نداریم، در صورتی‌که h_a هم از b و هم از m_a کوچک‌تر باشد، دو مثلث و اگر h_a با عدد کوچک‌تر از بین m_a و b برابر باشد، یک مثلث می‌توان رسم کرد. اما اگر h_a بزرگ‌تر از m_a یا بزرگ‌تر از b باشد، هیچ مثلثی نمی‌توان رسم کرد.

طریقهٔ رسم به این صورت است که ابتدا مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM را رسم می‌کنیم. HM را از دو طرف امتداد می‌دهیم و به مرکز A و شعاع b یک کمان می‌زنیم تا نقطهٔ C معلوم شود. حال به مرکز M و شعاع MC یک کمان می‌زنیم تا نقطهٔ B به‌دست آید.



فرض می‌کنیم مثلث به‌صورت مقابل باشد:



در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM طول HM برابر است با:

$$AM^2 = HM^2 + HA^2 \Rightarrow ۱۰۰ = HM^2 + ۶۴ \Rightarrow HM = ۶$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB داریم:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow ۲۸۹ = ۶۴ + HB^2 \Rightarrow HB^2 = ۲۲۵ \Rightarrow HB = ۱۵$$

بنابراین طول MB برابر است با:

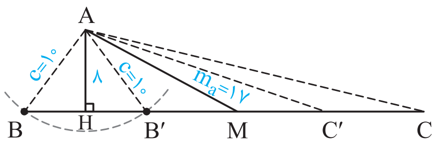
$$MB = HB - HM = ۱۵ - ۶ = ۹$$

از آن‌جایی که AM میانهٔ وارد بر ضلع BC می‌باشد، پس:

$$BC = ۲ \times MB \Rightarrow BC = ۲ \times ۹ = ۱۸ \Rightarrow a = ۱۸$$

۴۶ ۲

چون $h_a < b$ ،m_a، پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را می‌توان رسم کرد که به شکل مقابل می‌باشند:



در حالت اول که مثلث ABC ایجاد می‌شود داریم:

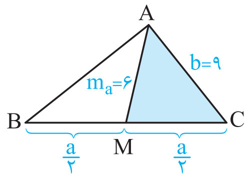
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AHB}: AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow ۱۰۰ = BH^2 + ۶۴ \Rightarrow BH = ۶ \\ \overset{\Delta}{AHM}: AM^2 = AH^2 + HM^2 \Rightarrow ۲۸۹ = ۶۴ + HM^2 \Rightarrow HM = ۱۵ \end{cases} \Rightarrow a = ۲BM = ۲(BH + HM) = ۲(۶ + ۱۵) = ۴۲$$

در حالت دوم که مثلث $AB'C'$ ایجاد می‌شود خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AHB'}: AB'^2 = AH^2 + HB'^2 \Rightarrow ۱۰۰ = ۶۴ + HB'^2 \Rightarrow HB' = ۶ \\ \overset{\Delta}{AHM}: AM^2 = AH^2 + HM^2 \Rightarrow ۲۸۹ = ۶۴ + HM^2 \Rightarrow HM = ۱۵ \end{cases} \Rightarrow a = ۲B'M = ۲(HM - HB') = ۲(۱۵ - ۶) = ۱۸$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها a نمی‌تواند ۳۰ باشد.

۴۷ ۴ چون $h_a > b$ است، پس با این معلومات نمی‌توان مثلثی رسم کرد.



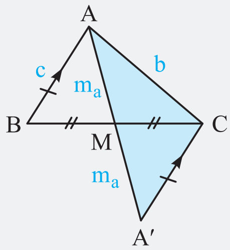
۴۸ ۳ مسأله را حل شده فرض می‌کنیم، با توجه به شکل مقابل، چون مثلث ABC قابل رسم است، پس مثلث AMC نیز با معلوم بودن سه ضلع باید قابل رسم باشد، بنابراین:

$$|m_a - b| < \frac{a}{۲} < m_a + b \Rightarrow |۶-۹| < \frac{a}{۲} < ۶+۹ \Rightarrow ۶ < a < ۳۰$$

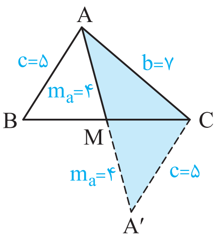
۴۹ ۲

نیم‌نگاه

رسم مثلث با معلوم بودن دو ضلع و میانهٔ وارد بر ضلع سوم



اگر b و c دو ضلع مثلث و m_a میانهٔ وارد بر ضلع سوم مثلث باشد، در صورتی که $|b-c| < ۲m_a < b+c$، یک مثلث می‌توان رسم کرد و در غیر این‌صورت هیچ مثلثی قابل رسم نیست. نحوهٔ رسم به این‌صورت است که میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ A' برسیم، چون سه ضلع مثلث $AA'C$ معلوم است، قابل رسم می‌باشد، پس آن را رسم می‌کنیم. سپس از C به وسط AA' وصل کرده و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ B به‌دست آید. حالا دلیل $|b-c| < ۲m_a < b+c$ روشن شد، چون داستان اصلی، قابل رسم بودن مثلث $AA'C$ است.



باید میانهٔ m_a را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم و بررسی کنیم که آیا مثلث $AA'C$ قابل رسم است یا خیر:

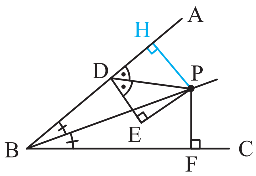
$۷-۵ < ۸ < ۵+۷ \Rightarrow$ یک مثلث قابل رسم است.

۵۰ ۲ مطابق آن‌چه گفته شد باید $|b-c| < ۲m_a < b+c$ باشد، پس:

$$۲ < ۲(۲x-۱) < ۱۲ \Rightarrow ۱ < ۲x-۱ < ۶ \Rightarrow ۲ < ۲x < ۷ \Rightarrow ۱ < x < ۳/۵$$

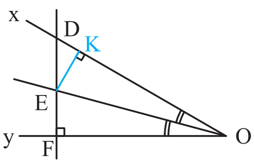
بنابراین x می‌تواند مقادیر صحیح ۲ و ۳ را بپذیرد.

۵۱ ۲ چون P روی نیمساز ABC است، پس مطابق شکل $PH = PF = ۵$ می‌باشد. از طرفی چون P روی نیمساز ADE نیز هست، پس $PH = PE = ۵$.



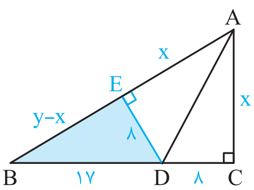
۵۲ ۱ می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. بنابراین در شکل مقابل $EF = EK$ می‌باشد. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ EKD، وتر از اضلاع قائمه بزرگ‌تر است، پس:

$$DE > EK \xrightarrow{EF=EK} DE > EF$$



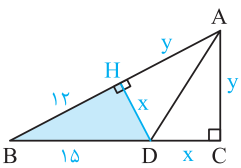
۵۳ ۴ فرض می‌کنیم $AC = x$ و $AB = y$ باشد. $y-x$ مدنظر سؤال است. از نقطهٔ D عمودی بر وتر مثلث رسم می‌کنیم. چون D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، پس فاصله‌اش از دو ضلع زاویه برابر است و در نتیجه $DE = ۸$ و همچنین $AE = x$ خواهد بود. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BED داریم:

$$BD^۲ = BE^۲ + DE^۲ \Rightarrow ۱۷^۲ = (y-x)^۲ + ۸^۲ \Rightarrow (y-x)^۲ = ۲۲۵ \Rightarrow y-x = ۱۵$$



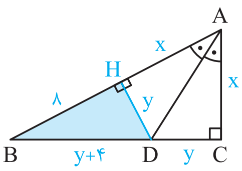
۵۴ ۲ فرض می‌کنیم $DC = x$ و $AC = y$ باشد. از D بر AB عمود می‌کنیم، چون D روی نیمساز A می‌باشد، پس $DC = DH = x$ و $AH = AC = y$ است. با توجه به $AB - AC = ۱۲$، طول AB برابر $۱۲ + y$ به‌دست می‌آید، پس $BH = ۱۲$ خواهد بود. حال به کمک فیثاغورس در مثلث BHD داریم:

$$BD^۲ = HD^۲ + HB^۲ \Rightarrow ۱۵^۲ = x^۲ + ۱۲^۲ \Rightarrow x^۲ = ۸۱ \Rightarrow x = ۹ \Rightarrow DC = ۹$$



۵۵ ۱ با فرض $AC = x$ و $DC = y$، مقادیر $AB = x + ۸$ و $BD = y + ۴$ به‌دست می‌آیند. از D بر AB عمود می‌کنیم، چون D روی نیمساز زاویهٔ A می‌باشد، پس $DH = DC = y$ و $AH = AC = x$ می‌باشد. به کمک فیثاغورس در مثلث BHD داریم:

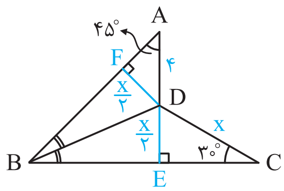
$$BD^۲ = HD^۲ + HB^۲ \Rightarrow (y+۴)^۲ = y^۲ + ۸^۲ \Rightarrow y^۲ + ۸y + ۱۶ = y^۲ + ۶۴$$
$$\Rightarrow ۸y = ۴۸ \Rightarrow y = ۶ \Rightarrow DC = ۶$$



۵۶ | **۲**

نیم‌نگاه

در فصل سوم خواهیم خواند که در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، برابر نصف وتر و ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰°، برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.

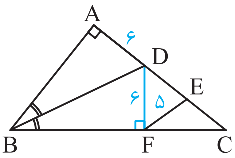


چون D روی نیمساز زاویهٔ $A\hat{B}C$ قرار دارد، پس فاصله‌اش تا BA و BC برابر است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC، DE ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° است، پس برابر نصف وتر یعنی $\frac{x}{۲}$ می‌باشد. همچنین مثلث DFA قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است $(\hat{A}=\hat{D}=۴۵^\circ)$، بنابراین $AF=\frac{x}{۲}$ و داریم:

$$AF^۲+DF^۲=AD^۲ \Rightarrow \left(\frac{x}{۲}\right)^۲+\left(\frac{x}{۲}\right)^۲=۴^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴}+\frac{x^۲}{۴}=۱۶ \Rightarrow \frac{۲x^۲}{۴}=۱۶$$

$$\Rightarrow x^۲=۳۲ \Rightarrow x=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$$

۵۷ | **۴**



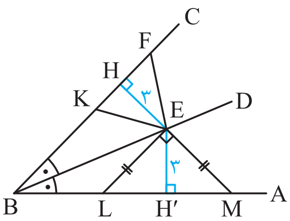
چون D روی نیمساز زاویهٔ B است، پس فاصله‌اش تا دو ضلع زاویهٔ B برابر است. از طرفی چون $AB=BF$ می‌باشد، پس F پای عمودی است که از D بر BC رسم می‌شود. بنابراین $DF=DA=۶$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DFC، چون $DE=EC$، پس FE میانهٔ وارد بر وتر می‌باشد که برابر با نصف وتر است. پس:

$$EF=\frac{۱}{۲}DC \Rightarrow ۵=\frac{۱}{۲}DC \Rightarrow DC=۱۰$$

حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث DFC داریم:

$$DC^۲=FD^۲+FC^۲ \Rightarrow ۱۰^۲=۶^۲+FC^۲ \Rightarrow FC^۲=۶۴ \Rightarrow FC=۸$$

۵۸ | **۲**



چون مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع KEF برابر $۳\sqrt{۳}$ است، پس طول ضلع مثلث برابر است با:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=۳\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲=۱۲ \Rightarrow a=\sqrt{۱۲}$$

حال ارتفاع مثلث KEF را به‌دست می‌آوریم:

$$EH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\sqrt{۱۲}=۳$$

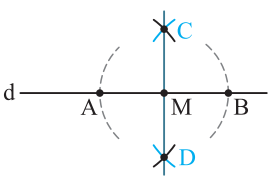
با توجه به این‌که E نقطه‌ای روی نیمساز زاویهٔ B است، پس مطابق شکل، طول EH' نیز برابر ۳ می‌باشد. چون مثلث LEM قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس ارتفاع وارد بر وتر همان میانهٔ وارد بر وتر نیز هست و می‌دانیم میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر می‌باشد. یعنی:

$$EH'=۳ \Rightarrow LM=۲\times۳=۶$$

۵۹ | **۱**

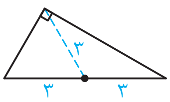
همان‌طور که در رسم عمودمنصف دیدید، برای رسم عمودمنصف AB کافی است دو کمان به مراکز A و B رسم کنیم.

۶۰ | **۲**



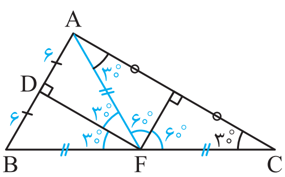
کافی است به مرکز M و شعاع دلخواه یک دایره رسم کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. اکنون M وسط پاره‌خط AB است. حال کافی است عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم. برای رسم عمودمنصف AB کافی است به مراکز A و B و به شعاع دلخواهی که بزرگ‌تر از نصف AB باشد، دو دایره رسم کنیم تا یکدیگر را در C و D قطع کنند. خط گذرا از C و D هم از M می‌گذرد و هم بر d عمود است. بنابراین باید سه دایره رسم کنیم.

۶۱ | **۳**



در مثلث قائم‌الزاویه، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها در وسط وتر قرار دارد و فاصلهٔ آن تا سه رأس مثلث برابر است. بنابراین طول بزرگ‌ترین ضلع که همان وتر می‌باشد برابر ۶ است.

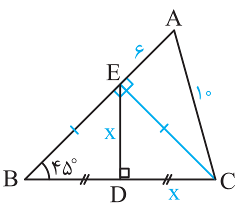
۶۲ | **۱**



با توجه به صورت تست، شکل مسأله به‌صورت مقابل است. حال کافی است از F به A وصل کنیم. چون F روی عمودمنصف اضلاع است، پس $FA=FC$ و $FA=FB$. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، نیمساز زاویهٔ رأس نیز می‌باشد. بنابراین زاویه‌ها مطابق شکل می‌باشند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADF ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، نصف وتر است. پس:

$$DA=۶ \Rightarrow FA=۱۲ \Rightarrow FA=FC=۱۲$$

۶۳ | **۱**



از E به C وصل می‌کنیم. مثلث BEC متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است، لذا مثلث CEA قائم‌الزاویه می‌باشد و داریم:

$$AE^۲+CE^۲=AC^۲ \Rightarrow ۶^۲+CE^۲=۱۰^۲ \Rightarrow CE=۸$$

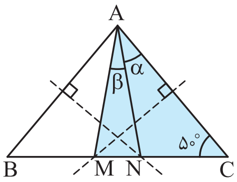
حال در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین CDE داریم:

$$CD^۲+DE^۲=CE^۲ \Rightarrow x^۲+x^۲=۸^۲ \Rightarrow x^۲=۳۲ \Rightarrow x=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$$

۶۴ **۳** مرکز دایرهٔ گذرا بر سه رأس مثلث، محل تلاقی عمودمنصف‌های آن می‌باشد. چون این نقطه بیرون مثلث است، پس مثلث منفرجه‌الزاویه می‌باشد که در گزینهٔ (۳) با یک مثلث منفرجه‌الزاویه مواجهیم:

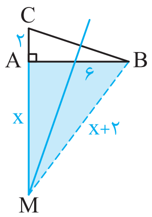
$۳۰^\circ+۴۰^\circ+\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۱۱۰^\circ \Rightarrow$ مثلث منفرجه‌الزاویه است.

۶۵ **۲** مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس از $\hat{A}=۸۰^\circ$ نتیجه می‌شود $\hat{B}=\hat{C}=۵۰^\circ$. چون M روی عمودمنصف AC قرار دارد، پس AMC متساوی‌الساقین می‌باشد. لذا $\alpha+\beta=۵۰^\circ$ است و در نتیجه $\widehat{M}=۸۰^\circ$. به‌همین ترتیب در مثلث متساوی‌الساقین BNA نیز $\widehat{N}=۸۰^\circ$ می‌باشد. حال در مثلث AMN داریم:



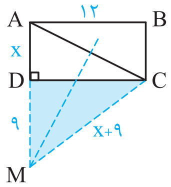
$$\beta+\widehat{M}+\widehat{N}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \beta+۸۰^\circ+۸۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\beta=۲۰^\circ$$

۶۶ **۲** در مثلث شکل مقابل، عمودمنصف وتر، امتداد ضلع کوچک‌تر را در نقطهٔ M قطع کرده است. طول MA فاصلهٔ M تا نزدیک‌ترین رأس مثلث است. با فرض $MA=x$، چون M روی عمودمنصف BC قرار دارد، پس $MC=MB$ و در نتیجه $MB=x+۲$ خواهد بود. در مثلث قائم‌الزاویهٔ MAB داریم:



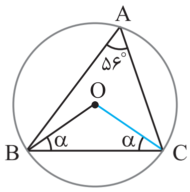
$$MB^۲=MA^۲+AB^۲ \Rightarrow (x+۲)^۲=x^۲+۳۶\Rightarrow x^۲+۴x+۴=x^۲+۳۶$$
$$\Rightarrow ۴x=۳۲\Rightarrow x=۸$$

۶۷ **۳** در شکل مقابل، طول MD فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس مستطیل است، پس $MD=۹$ می‌باشد. چون M روی عمودمنصف قطر AC است، پس $MA=MC$ می‌باشد. با فرض $AD=x$، مقدار $MC=x+۹$ خواهد بود. به کمک فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ MDC داریم:



$$MC^۲=MD^۲+DC^۲\Rightarrow (x+۹)^۲=۸۱+۱۴۴\Rightarrow (x+۹)^۲=۲۲۵\Rightarrow x+۹=۱۵\Rightarrow x=۶$$

۶۸ **۴** به مرکز O و شعاع OB یک دایره رسم می‌کنیم. چون فاصلهٔ نقطهٔ O تا سه رأس مثلث یکسان است، پس حتماً دایره از رأس‌های A و C نیز می‌گذرد. حال از O به C وصل می‌کنیم، مثلث BOC متساوی‌الساقین است، زیرا $OB=OC$ می‌باشد و داریم:

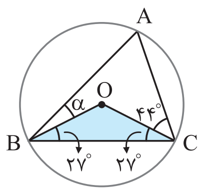


$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\ ,\ B\hat{O}C=\overset{\frown}{BC}\Rightarrow B\hat{O}C=۲\hat{A}=۲\times۵۶^\circ=۱۱۲^\circ$$

در مثلث BOC داریم:

$$\alpha+۱۱۲^\circ+\alpha=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲\alpha=۶۸^\circ\Rightarrow\alpha=۳۴^\circ$$

۶۹ **۳** دایره به مرکز O و شعاع OB از رأس‌های دیگر مثلث نیز می‌گذرد. در ضمن مثلث OBC متساوی‌الساقین است، پس:



$$\overset{\Delta}{OBC}:\hat{O}+۲۷^\circ+۲۷^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{O}=۱۲۶^\circ$$

از طرفی O زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان BC و A زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان BC است، پس:

$$\hat{O}=۲\hat{A}\Rightarrow ۱۲۶^\circ=۲\hat{A}\Rightarrow\hat{A}=۶۳^\circ$$

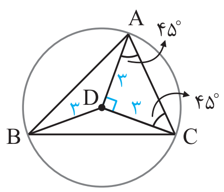
حال در مثلث ABC داریم:

$$۶۳^\circ+(۴۴^\circ+۲۷^\circ)+(۲۷^\circ+\alpha)=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۱۶۱^\circ+\alpha=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha=۱۹^\circ$$

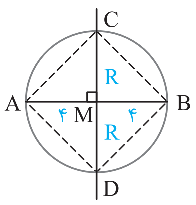
۷۰ **۲** زوایای A و D را در مثلث‌های ABC و BDC به‌دست می‌آوریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}:\hat{A}+(۲۰^\circ+۲۵^\circ)+(۲۰^\circ+۴۵^\circ)=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}=۷۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{BDC}:۲۰^\circ+\hat{D}+۲۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{D}=۱۴۰^\circ$$

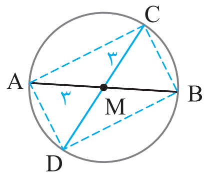


چون $\hat{D}=۲\hat{A}$، پس $B\hat{D}C$، زاویهٔ مرکزی و $B\hat{A}C$ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به یک کمان مشترک در دایره می‌باشند و این یعنی D محل تلاقی عمودمنصف‌های مثلث ABC است. پس $DA=DB=DC=۳$ می‌باشد و این یعنی مثلث CDA، متساوی‌الساقین است که در نتیجه قائم‌الزاویه نیز می‌شود. بنابراین $AC=۳\sqrt{۲}$ است.

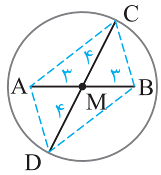


۷۱ **۲** می‌دانیم در مربع، قطرها با هم برابر و عمودمنصف یکدیگرند. بنابراین با توجه به شکل مقابل $۲R=۸$ می‌باشد، پس $R=۴$ است.

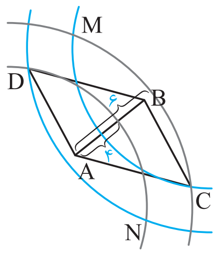
۷۲ **۳** با توجه به توضیحات سؤال و شکل مقابل، AB و CD قطرهای چهارضلعی $ACBD$ می‌باشند. چون قطرهای AB و CD با هم برابرند و یکدیگر را نصف می‌کنند، پس چهارضلعی $ACBD$ مستطیلی به قطر ۶ می‌باشد.



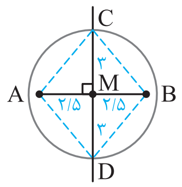
۷۳ **۳** با توجه به توضیحات سؤال و شکل مقابل، واضح است کـه AB و CD یعنـی قطرهـای چهارضلـعی $ACBD$ منصف یکدیگرند، بنابراین چهارضلعی $ACBD$ متوازی‌الاضلاع با قطرهای ۶ و ۸ است.



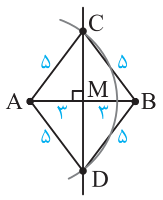
۷۴ **۴** با توجه به شکل مقابل چهارضلعی $ACBD$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا رأس D روی کمانی به مرکز A و شـعاع ۴ قرار دارد، پس $AD = ۴$ و رأس C روی کمانی به مرکز A و شعاع ۶ واقع شـده، پـس $AC = ۶$ اسـت. بـه همین ترتیب $BC = ۴$ و $BD = ۶$ می‌باشند. یعنی در چهارضلعی $ACBD$ اضلاع روبه‌رو، دو به دو مساوی‌اند. بنابراین دو مثلث ABC و ABD به حالت سه ضلع برابر، هم‌نهشت می‌باشند، پس $D\hat{B}A = C\hat{A}B$ بـوده و طبـق عکـس قضیـهٔ خطـوط مـوازی و مـورب $BD \parallel AC$ و بـه طریـق مشابـه $AD \parallel BC$، پس $ACBD$ متوازی‌الاضلاع است. دقت کنید اگر نقاط M و N را انتخاب می‌کردیم، جواب همین می‌شد ولی اگر نقـاط D و N یا C و M را انتخاب می‌کردیم، چهارضلعی حاصل کایت می‌شد که در گزینه‌ها نیست.



۷۵ **۴** مطابق شکل مقابل، چهارضلعی $ACBD$ یـک لـوزی بـه قطرهـای ۵ و ۶ می‌باشـد، زیـرا قطرهـا عمودمنصـف یکدیگرند.



۷۶ **۴** مطابق شـکل، چـون C و D روی عمودمنصـف AB می‌باشـند، پـس $CA = CB = ۵$ و $DA = DB = ۵$ می‌باشد. بـه کمـک فیثـاغورس در مثلث‌هـای قائم‌الزاویـه، مقـدار $MC = MD = ۴$ می‌باشـد. چـون قطرهـا عمودمنصف یکدیگرند، پس یک لوزی به اقطار ۶ و ۸ و ضلع ۵ داریم.

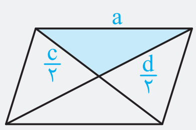


۷۷ **۲** فقط یک مربع با طول قطر d وجود دارد، زیرا در مربع قطرها باهم برابر و برهم عمودند.

۷۸ **۳**

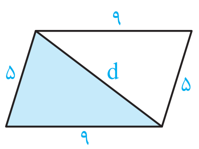
نیم‌نگاه

برای این‌که ببینیم یک چهارضلعی قابل رسم است یا نه، ابتدا با اطلاعات داده شده چهارضلعی را رسم شده فرض می‌کنیم. حال در چهارضلعی یک مثلث پیدا می‌کنیم که اطلاعات سه جزء مستقل آن معلوم است. اگر آن مثلث قابل رسم بود، چهارضلعی نیز قابل رسم است. مثلاً برای آن‌که یک متوازی‌الاضلاع به ضلع a و قطرهای c و d قابل رسم باشد، باید a، $\frac{c}{۲}$ و $\frac{d}{۲}$ در نامساوی مثلثی صدق کنند.

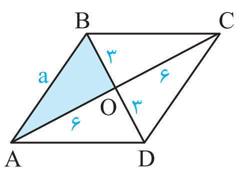


فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع مطلوب به‌صورت مقابل باشد، واضح است که اگر مثلث رنگ‌شده قابل رسم باشد، متوازی‌الاضلاع نیز رسم می‌شود، پس:

$۹ - ۵ < d < ۵ + ۹ \Rightarrow ۴ < d < ۱۴ \Rightarrow$ با توجه به گزینه‌ها d نمی‌تواند ۴ باشد.

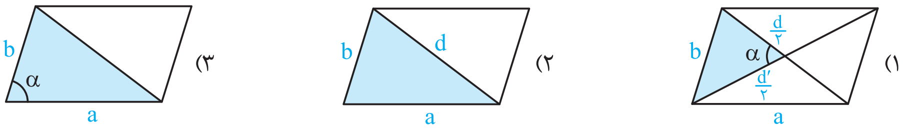


۷۹ **۳** فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع رسم‌شـده، متوازی‌الاضـلاع شـکل مقابـل باشـد. در ضـمن مـی‌دانیم قطرهـای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگر هستند. اگر مثلث AOB قابل رسم باشد، متوازی‌الاضلاع $ABCD$ نیـز قابـل رسم است. بدین‌ترتیب که ابتدا مثلث AOB را رسم مـی‌کنیم. سـپس AO و BO را بـه انـدازهٔ خـود امتـداد می‌دهیم تا رأس‌های C و D به‌دست آیند، حال متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مشخص مـی‌شـود. مـی‌دانیم بـرای آن‌که مثلث AOB قابل رسم باشد، باید داشته باشیم:

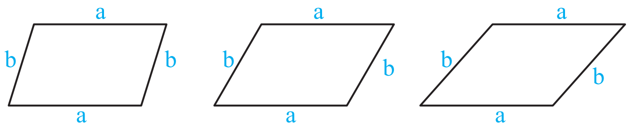


$۶ - ۳ < a < ۶ + ۳ \Rightarrow ۳ < a < ۹ \Rightarrow$ با توجه به گزینه‌ها a نمی‌تواند ۱۰ باشد.

۸۰ ۴ در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) چون مثلث رنگ‌شدهٔ موجود در متوازی‌الاضلاع را می‌توان به‌طور منحصر به فرد رسم کرد، پس یک متوازی‌الاضلاع با آن معلومات رسم می‌شود.

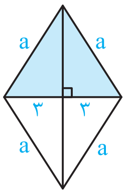


اما اگر طول چهار ضلع را بدانیم، بی‌شمار متوازی‌الاضلاع قابل رسم است:



۸۱ ۱ فرض می‌کنیم لوزی رسم‌شده به‌صورت مقابل باشد. اگر مثلث رنگ‌شده که طول سه ضلع آن را در اختیار داریم قابل رسم شد، لوزی نیز قابل رسم است. پس باید مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر باشد، یعنی:

$a + a > ۶ \Rightarrow ۲a > ۶ \Rightarrow a > ۳ \Rightarrow$ با توجه به گزینه‌ها a نمی‌تواند ۳ باشد.



۸۲ ۳ مطابق توضیحات صورت سؤال $\hat{A} - \hat{B} = ۲\hat{C}$ می‌باشد. از طرفی $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$ است، پس:

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \\ \hat{A} - \hat{B} = ۲\hat{C} \end{cases} \xRightarrow{+} ۲\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ + ۲\hat{C} \Rightarrow ۲\hat{A} = ۱۸۰^\circ + \hat{C} \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ + \frac{\hat{C}}{۲} \Rightarrow \hat{A} > ۹۰^\circ$$

چون زاویهٔ A منفرجه است، پس نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌ها خارج مثلث قرار دارد.

۸۳ ۱ مثلث ABC منفرجه‌الزاویه است، زیرا:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} + ۴۲^\circ + ۴۷^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۹۱^\circ$$

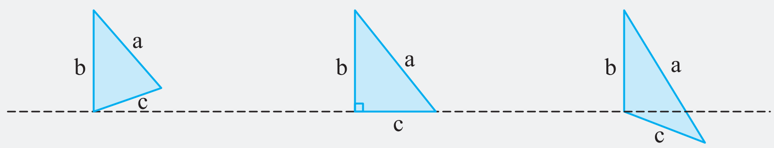
بنابراین نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها بیرون مثلث و در ناحیهٔ بین امتداد دو ضلع زاویهٔ منفرجه یعنی ناحیهٔ ۱ می‌افتد.

۸۴ ۳ محل تلاقی سه میانه و سه نیمساز داخلی همواره داخل مثلث است، اما چون $\hat{A} > ۹۰^\circ$، پس مثلث ABC منفرجه‌الزاویه می‌باشد و محل تلاقی سه ارتفاع و سه عمودمنصف خارج مثلث است.

۸۵ ۳

نیم‌نگاه

برای تشخیص نوع مثلث از روی طول اضلاع به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

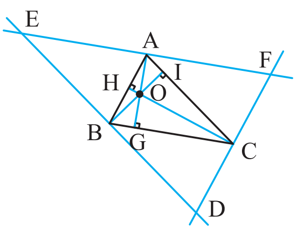


$a^۲ < b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow$ حاده‌الزاویه $a^۲ = b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow$ قائم‌الزاویه $a^۲ > b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow$ منفرجه‌الزاویه

با توجه به این‌که $۱۴/۵^۲ = ۱۰^۲ + ۱۰/۵^۲$ می‌باشد، پس نوع مثلث، قائم‌الزاویه است. بنابراین نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌ها روی رأس قائمهٔ مثلث می‌باشد که روی محیط مثلث واقع است.

۸۶ ۱ با سه نقطهٔ غیر واقع بر یک راستا، می‌توان یک مثلث ساخت که محل تلاقی عمودمنصف‌های سه ضلع این مثلث از سه نقطه که رأس‌های مثلث می‌باشند به یک فاصله است. بنابراین یک نقطه در صفحه وجود دارد.

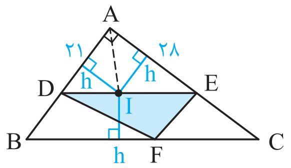
۸۷ ۱ شکل را رسم می‌کنیم. از آن‌جایی‌که $EF \parallel BC$ و $AB \parallel DF$ می‌باشند، پس چهارضلعی‌های ABCF و ACBE متوازی‌الاضلاع هستند، بنابراین $BC = AE = AF$ می‌باشد. پس نقطهٔ A وسط ضلع EF قرار دارد. چون AG بر BC عمود است، پس بر EF نیز عمود می‌باشد، بنابراین AG عمودمنصف EF است. در نتیجه عمودمنصف یک ضلع مثلث DEF بر ارتفاع مثلث ABC منطبق است. به همین ترتیب سایر عمودمنصف‌ها نیز بر ارتفاع‌ها منطبق می‌باشند. پس نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های DEF است.



۸۸ ۱ چون سه ارتفاع مثلث همرسند، پس ارتفاع سوم مثلث نیز از نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌های نظیر دو ضلع AC و AB می‌گذرد. بنابراین فاصلهٔ آن از ارتفاع سوم صفر است.

۸۹ **۲** چون $BA \parallel CD$ است، پس طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم:
$$\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳\beta+۳\theta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \beta+\theta=۶۰^\circ$$
در مثلث BEC، طبق شکل، چون P روی نیمساز زاویه‌های B و C قرار دارد و با خطی که از رأس E رسم‌شده هم تلاقی دارد، پس روی نیمساز $\hat{E}$ هم هست، در نتیجه نقطهٔ P، محل تلاقی نیمسازها می‌باشد، پس:
$$\hat{B}+\hat{C}+\hat{E}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\beta+۲\theta+\hat{E}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\beta+\theta=۶۰^\circ} \hat{E}=۶۰^\circ \Rightarrow \alpha=\frac{\hat{E}}{۲}=\frac{۶۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ$$

۹۰ **۱** فرض می‌کنیم I محل تلاقی نیمسازها باشد. می‌دانیم فاصلهٔ I تا اضلاع مثلث با هم برابر است، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADE داریم:

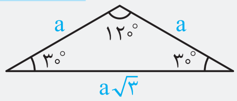


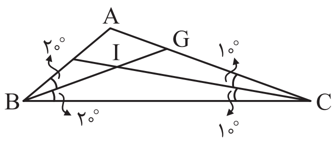
$$DE^۲=AD^۲+AE^۲ \Rightarrow DE^۲=۴۴۱+۷۸۴=۱۲۲۵ \Rightarrow DE=۳۵$$
$$S_{ADE}=S_{AIE}+S_{AID} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۲۱\times ۲۸=\frac{۱}{۲}\times ۲۱\times h+\frac{۱}{۲}\times ۲۸\times h$$
$$\Rightarrow ۵۸۸=h(۲۱+۲۸) \Rightarrow h=۱۲$$
بنابراین مساحت مثلث DEF برابر است با:
$$S=\frac{۱}{۲}\times DE\times h=\frac{۱}{۲}\times ۳۵\times ۱۲=۲۱۰$$

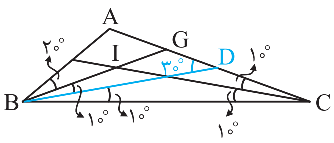
۹۱ **۲**

نیم‌نگاه

در فصل سوم خواهیم دید که در مثلث متساوی‌الساقین با زوایای ۳۰°، ۳۰° و ۱۲۰°، طول قاعده $\sqrt{۳}$ برابر طول ساق‌ها می‌باشد.

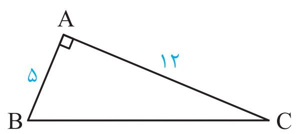




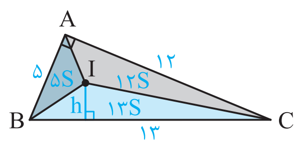


با توجه به اطلاعات سؤال، مثلث ABC به‌صورت مقابل است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مثلث GBC متساوی‌الساقین است، چون در این مثلث $\hat{B}=\hat{C}=۲۰^\circ$ می‌باشد. حال در این مثلث نیمساز زاویهٔ B را رسم می‌کنیم، نیمسازهای وارد بر دو ساق در مثلث متساوی‌الساقین با هم برابرند، پس $BD=CI$. در مثلث ABD، $\hat{D}$ زاویهٔ خارجی مثلث BDC است، پس $\hat{D}=۳۰^\circ$ و در نتیجه مثلث ABD متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۱۲۰° می‌باشد. بنابراین طول قاعده $\sqrt{۳}$ برابر طول ساق است، یعنی $BD=\sqrt{۳}AB$، از طرفی داشتیم $BD=CI$، پس $CI=\sqrt{۳}AB$ بوده و $\frac{CI}{AB}=\sqrt{۳}$ می‌باشد.

۹۲ **۲** در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC شکل مقابل داریم:

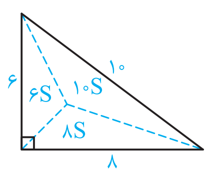


$$BC^۲=AB^۲+AC^۲ \Rightarrow BC^۲=۲۵+۱۴۴=۱۶۹ \Rightarrow BC=۱۳$$
با وصل کردن نقطهٔ تلاقی نیمسازها به رأس‌های مثلث، مساحت‌ها به‌صورت شکل مقابل تقسیم می‌شوند و داریم:



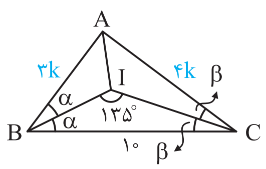
$$۱۳S+۱۲S+۵S=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۱۲ \Rightarrow ۳۰S=۳۰ \Rightarrow S=۱$$
بنابراین در مثلث BIC می‌توان گفت:
$$S_{BIC}=۱۳S \xrightarrow{S=۱} S_{BIC}=۱۳ \Rightarrow ۱۳=\frac{۱}{۲}\times ۱۳\times h \Rightarrow h=۲ \Rightarrow \text{فاصلهٔ I از BC}=۲$$

۹۳ **۲** در این مثلث طول وتر برابر ۱۰ می‌باشد. اگر از محل تلاقی نیمسازها به سه رأس مثلث وصل کنیم، مساحت مثلث به‌صورت مقابل تقسیم می‌شود و داریم:



$$۶S+۱۰S+۸S=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۸ \Rightarrow ۲۴S=۲۴ \Rightarrow S=۱$$
بنابراین مساحت مثلث مجاور به وتر برابر $۱۰S=۱۰\times ۱=۱۰$ می‌باشد.

۹۴ **۳** می‌دانیم اگر از محل تلاقی نیمسازهای داخلی به سه رأس وصل کنیم، مساحت مثلث‌های ایجاد شده متناسب با اضلاع کناری است. پس:
$$\frac{S_{ABI}}{S_{AIC}}=\frac{AB}{AC}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow AB=۳k \text{ ، } AC=۴k$$
با توجه به شکل مقابل داریم:

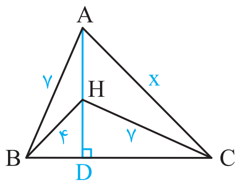


$$\overset{\Delta}{BIC}: \alpha+۱۳۵^\circ+\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۴۵^\circ$$
$$\overset{\Delta}{ABC}: ۲\alpha+۲\beta+\hat{A}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\alpha+\beta=۴۵^\circ} \hat{A}=۹۰^\circ$$

بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه است و داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 100 = 9k^2 + 16k^2 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \begin{cases} AB = 6 \\ AC = 8 \end{cases} \Rightarrow AB + AC = 14$$

۹۵ ۴ ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم. چون سه ارتفاع مثلث همرسند، پس حتماً از نقطهٔ H می‌گذرد. در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ADB و ADC می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} AD^2 + DB^2 = AB^2 \Rightarrow AD^2 = 49 - DB^2 \\ AD^2 + DC^2 = AC^2 \Rightarrow AD^2 = x^2 - DC^2 \end{cases} \Rightarrow 49 - DB^2 = x^2 - DC^2 \quad (1)$$

حال در مثلث‌های HDB و HDC داریم:

$$\begin{cases} HD^2 + DB^2 = BH^2 \Rightarrow HD^2 = 16 - DB^2 \\ HD^2 + DC^2 = CH^2 \Rightarrow HD^2 = 49 - DC^2 \end{cases} \Rightarrow 16 - DB^2 = 49 - DC^2 \quad (2)$$

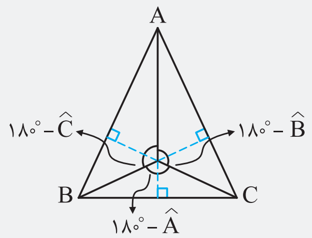
با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} 49 - DB^2 = x^2 - DC^2 \Rightarrow DC^2 - DB^2 = x^2 - 49 \\ 16 - DB^2 = 49 - DC^2 \Rightarrow DC^2 - DB^2 = 49 - 16 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 49 = 49 - 16 \Rightarrow x^2 = 82 \Rightarrow x = \sqrt{82}$$

۹۶ ۳

نیم‌نگاه

اگر ارتفاع‌های مثلث ABC را رسم کنیم، زاویهٔ بین ارتفاع‌ها به‌صورت زیر می‌باشند:

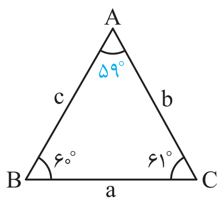


با توجه به مطلب فوق داریم:

$$B\hat{H}C = 180° - B\hat{A}C \Rightarrow 130° = 180° - B\hat{A}C \Rightarrow B\hat{A}C = 50°$$

۹۷ ۳ در هر مثلث به‌جز مثلث متساوی‌الساقین، اگر AH ارتفاع، AD نیمساز و AM میانه باشند، آن‌گاه همواره $AH < AD < AM$ است. اما در مثلث متساوی‌الساقین، اگر A رأس مثلث باشد، AD ،AM و AH برهم منطبق می‌شوند و $AH = AD = AM$ است. بنابراین در این سؤال چون $AD < AM$ می‌باشد، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین نیست.

۹۸ ۲ در مثلث ABC زاویهٔ $\hat{A}$ برابر $59°$ می‌باشد، زیرا:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{A} + 60° + 61° = 180° \Rightarrow \hat{A} = 59°$$

با توجه به قضیهٔ زاویه و ضلع برتر می‌توان گفت:

$$\hat{A} < \hat{B} < \hat{C} \Rightarrow a < b < c$$

حال می‌توان گفت:

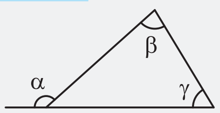
$$\begin{cases} a < b \xRightarrow{+c} a + c < b + c \\ b < c \xRightarrow{+a} a + b < a + c \end{cases} \Rightarrow a + b < a + c < b + c$$

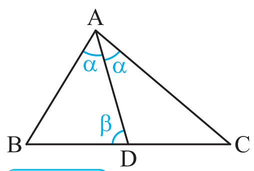
۹۹ ۱

نیم‌نگاه

در هر مثلث، هر زاویهٔ خارجی از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاور بزرگ‌تر است.

$$\boxed{\alpha > \beta \ ، \ \alpha > \gamma}$$



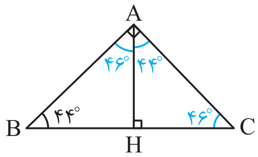


با توجه به شکل مقابل، چون β زاویهٔ خارجی مثلث ADC می‌باشد، پس $\beta > \alpha$ است. بنابراین در مثلث ABD چون $\beta > \alpha$ است، پس طبق قضیهٔ زاویه و ضلع برتر $AB > BD$ می‌باشد.

نیم‌نگاه

در هر مثلث، قطعات ایجاد شده توسط نیمسازهای داخلی، از ضلع مجاور خود کوچک‌تر می‌باشند.

۱۰۰ **۲** با توجه به توضیحات تست، شکل مسأله به‌صورت مقابل است:



در مثلث AHB داریم:

$$\hat{B} < \hat{A} < \hat{H} \Rightarrow AH < BH < AB \qquad (۱)$$

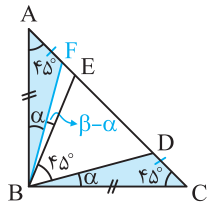
همچنین در مثلث AHC داریم:

$$\hat{A} < \hat{C} < \hat{H} \Rightarrow CH < AH < AC \qquad (۲)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) می‌توان گفت:

$$\begin{cases} AH < BH < AB \\ CH < AH < AC \end{cases} \Rightarrow CH < AH < BH < AB$$

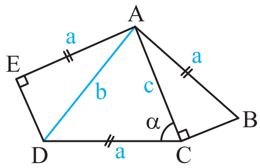
۱۰۱ **۱** در مثلث ABC زاویه‌های A و C برابر ۴۵° می‌باشند. نقطهٔ F را روی پاره‌خط AE طوری انتخاب می‌کنیم که $AF = CD$ باشد. دو مثلث BAF و BCD به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین هم‌نهشت می‌باشند، پس زوایای متناظر آن‌ها با هم برابر است، از جمله زاویهٔ B در هر دو مثلث که برابر α می‌باشد. حال فرض می‌کنیم $F\hat{B}E = \beta - \alpha$ باشد. زوایای D و E در مثلث BDE زوایای خارجی مثلث‌های BDC و BEA می‌باشند، پس $\hat{D} = \alpha + ۴۵^\circ$ و $\hat{E} = \beta + ۴۵^\circ$ خواهند بود و از آن‌جایی که $\beta > \alpha$ می‌باشد، پس $\hat{E} > \hat{D} > ۴۵^\circ$ خواهد بود. در مثلث BDE می‌توان نوشت:



$$\hat{E} > \hat{D} > ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{E} > \hat{D} > \hat{B} \Rightarrow BD > EB > DE$$

۱۰۲ **۲** از A به D وصل کرده و فرض می‌کنیم $AE = CD = AB = a$، $AC = c$ و $AD = b$ باشد.

در مثلث AED داریم $b > a$ و همچنین در مثلث ACB، $a > c$ می‌باشد، بنابراین داریم $b > a > c$.

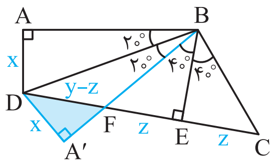


پس در مثلث ACD می‌توان گفت:

$$b > a > c \Rightarrow \hat{C} > \hat{A} > \hat{D} \xrightarrow{\hat{C}=\alpha} \alpha$$ بزرگ‌ترین زاویه است.

چون α بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث ABC می‌باشد، پس حتماً بزرگ‌تر از ۶۰° است.

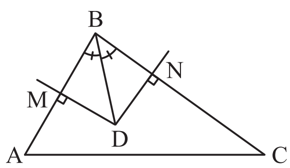
۱۰۳ **۳** مثلث $DA'B$ را هم‌نهشت با مثلث DAB رسم می‌کنیم. مثلث FBC متساوی‌الساقین است، چون ارتفاع BE نیمساز زاویهٔ $\hat{B}$ نیز می‌باشد، پس $FE = EC = z$ و در نتیجه $DF = y - z$.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ $DA'F$ داریم:

$$y - z > x \Rightarrow y > x + z$$

۱۰۴ **۱** ابتدا مثلثی رسم می‌کنیم که $\hat{C} < \hat{A}$ باشد، چون MD عمودمنصف ضلع AB است، پس $AM = BM$. از طرفی BD نیمساز درونی زاویهٔ B است، پس دو مثلث NBD و MBD هم‌نهشت می‌باشند و داریم $NB = BM$. با توجه به دو تساوی اخیر داریم:

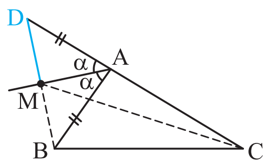


$$AM = BM = NB$$

چون $\hat{C} < \hat{A}$، پس در مثلث ABC داریم:

$$\hat{C} < \hat{A} \Rightarrow AB < BC \Rightarrow ۲BM < NB + NC \xrightarrow{BM=BN} ۲NB < NB + NC \Rightarrow NB < NC$$

۱۰۵ **۱** روی امتداد پاره‌خط AC، پاره‌خط AD را به اندازهٔ AB جدا می‌کنیم. دو مثلث AMD و AMB به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین هم‌نهشت می‌باشند. بنابراین $MB = MD$ است. در مثلث MDC با توجه به نامساوی مثلثی داریم:

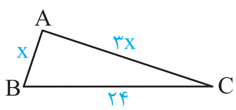


$$MD + MC > DC$$

چون $MB = MD$ و $AD = AB$ می‌باشند، داریم:

$$MD + MC > DC \Rightarrow MB + MC > AB + AC \Rightarrow \frac{MB + MC}{AB + AC} > ۱$$

۱۰۶ **۴** با توجه به صورت تست، مثلث ABC به‌صورت مقابل می‌باشد. به کمک نامساوی مثلثی داریم:

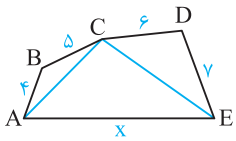


$$۳x - x < ۲۴ < ۳x + x \Rightarrow ۲x < ۲۴ < ۴x \Rightarrow \begin{cases} x > ۶ \\ x < ۱۲ \end{cases} \Rightarrow ۶ < x < ۱۲$$

از طرفی محیط مثلث برابر $x + ۳x + ۲۴ = ۴x + ۲۴$ می‌باشد، پس:

$$۶ < x < ۱۲ \Rightarrow ۲۴ < ۴x < ۴۸ \Rightarrow ۴۸ < ۴x + ۲۴ < ۷۲ \Rightarrow ۴۸ < \text{محیط} < ۷۲$$

۱۰۷ **۲** **روش اول:** از C به A و E وصل می‌کنیم. در مثلث‌های ABC و CDE داریم:

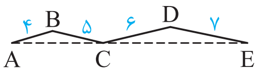


$$AC < ۴+۵ \Rightarrow AC < ۹ \quad , \quad CE < ۶+۷ \Rightarrow CE < ۱۳$$

حال در مثلث ACE می‌توان نوشت:

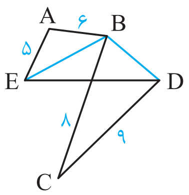
$$AE < AC + CE \xRightarrow[CE<۱۳]{AC<۹} AE < ۹+۱۳ \Rightarrow AE < ۲۲$$

روش دوم: AE می‌تواند آن‌قدر بزرگ شود (به‌قول معروف آن‌قدر کش بیاید) که ۵ضلعی ABCDE به‌صورت زیر شود:



$$\Rightarrow AE < ۴+۵+۶+۷ \Rightarrow AE < ۲۲$$

۱۰۸ **۴** **روش اول:** از B به E و D وصل می‌کنیم. در مثلث‌های ABE و BCD داریم:

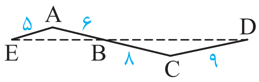


$$BE < ۵+۶ \Rightarrow BE < ۱۱ \quad , \quad BD < ۸+۹ \Rightarrow BD < ۱۷$$

حال در مثلث EBD می‌توان نوشت:

$$ED < EB + DB \Rightarrow ED < ۱۱+۱۷ \Rightarrow ED < ۲۸$$

روش دوم: ED می‌تواند آن‌قدر بزرگ شود که شکل به‌صورت مقابل درآید:



$$\Rightarrow ED < ۵+۶+۸+۹ \Rightarrow ED < ۲۸$$

۱۰۹ **۴** با فرض $AB = BC = CA = a$، $MA = b$ و $MB = c$ داریم:

$$\text{محیط}(\overset{\Delta}{ABC}) - \text{محیط}(\overset{\Delta}{ABM}) = ۴ \Rightarrow ۳a-(a+b+c) = ۴ \Rightarrow ۲a-b-c = ۴ \Rightarrow b+c = ۲a-۴$$

در مثلث ABM با توجه به نامساوی مثلثی می‌توان نوشت:

$$b+c > a \xRightarrow{b+c=۲a-۴} ۲a-۴ > a \Rightarrow a > ۴$$

بنابراین برای محیط مثلث ABC داریم:

$$\text{محیط}(\overset{\Delta}{ABC}) = ۳a > ۱۲ \Rightarrow$$ باتوجه به گزینه‌ها محیط می‌تواند ۱۴ باشد.

۱۱۰ **۴**

نیم‌نگاه

محیط هر مثلث، از دو برابر طول هر ضلع آن بزرگ‌تر است:

$$a < b+c \Rightarrow a+a < a+b+c \Rightarrow \boxed{۲a < \text{محیط}}$$

$$b < a+c \Rightarrow b+b < a+b+c \Rightarrow \boxed{۲b < \text{محیط}}$$

$$c < a+b \Rightarrow c+c < a+b+c \Rightarrow \boxed{۲c < \text{محیط}}$$

محیط مثلث ABC بزرگ‌تر از ۱۲ و محیط مثلث ACD بزرگ‌تر از ۱۴ می‌باشد. پس مجموع محیط آن‌ها بزرگ‌تر از $۱۲+۱۴ = ۲۶$ است.

۱۱۱ **۳** می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر nضلعی محدب برابر $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ و مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب ۳۶۰° است. پس:

$$(n-۲)\times ۱۸۰^\circ = ۴\times ۳۶۰^\circ \xRightarrow{\div ۱۸۰^\circ} n-۲ = ۴\times ۲ \Rightarrow n = ۱۰$$

۱۱۲ **۴** **روش اول:** فرض می‌کنیم زاویهٔ کنار گذاشته‌شده x باشد که $۰^\circ < x < ۱۸۰^\circ$ می‌باشد. چون چندضلعی مورد بحث، محدب است، بنابراین:

$$(n-۲)\times ۱۸۰^\circ = ۲۵۷۰^\circ + x \Rightarrow x = ۱۸۰^\circ n - ۲۹۳۰^\circ$$

$$۰^\circ < x < ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۰^\circ < ۱۸۰^\circ n - ۲۹۳۰^\circ < ۱۸۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} ۱۸۰^\circ n - ۲۹۳۰^\circ < ۱۸۰^\circ \Rightarrow n < ۱۷/... \\ ۱۸۰^\circ n - ۲۹۳۰^\circ > ۰^\circ \Rightarrow n > ۱۶/... \end{cases} \Rightarrow ۱۶/... < n < ۱۷/... \Rightarrow n = ۱۷$$

حال با معلوم شدن n، مقدار x هم معلوم می‌شود:

$$x = ۱۸۰^\circ(۱۷) - ۲۹۳۰^\circ = ۱۳۰^\circ$$

روش دوم: می‌دانیم مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی محدب، مضرب صحیحی از ۱۸۰° است. بنابراین:

$$\begin{array}{r|l} ۲۵۷۰ & ۱۸۰ \\ \hline -۲۵۲۰ & ۱۴ \\ \hline ۵۰ & \end{array}$$

بنابراین زاویهٔ کنار گذاشته‌شده ۱۳۰° بوده است. چون با توجه به باقی‌ماندهٔ ۵۰°، اگر ۱۳۰° به آن اضافه کنیم، عدد حاصل، مضرب صحیحی از ۱۸۰° خواهد شد.

۱۱۳ **۱** با توجه به این‌که اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی n ضلعی منتظم برابر $۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{n}$ می‌باشد، پس هرچه تعداد اضلاع یک n ضلعی منتظم بیشتر باشد، کسر $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ کوچک‌تر شده و زاویه‌های داخلی آن بزرگ‌تر خواهد بود. پس با توجه به گزینه‌ها، اندازهٔ زاویهٔ داخلی ده‌ضلعی از بقیه بزرگ‌تر است.

نیم‌نگاه

هر زاویهٔ داخلی n ضلعی منتظم برابر $۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{n}$ و هر زاویهٔ خارجی آن برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ می‌باشد. بنابراین هر چه n بزرگ‌تر شود، اندازهٔ زاویهٔ داخلی بزرگ‌تر و اندازهٔ زاویهٔ خارجی کوچک‌تر می‌شود.

۱۱۴ **۲** کافی است معادلهٔ $۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{n} = ۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{n+۲} - ۲^\circ$ را حل کنیم:

$$\cancel{۱۸۰^\circ} - \frac{۳۶۰^\circ}{n} = \cancel{۱۸۰^\circ} - \frac{۳۶۰^\circ}{n+۲} - ۲^\circ \xrightarrow{\div(-۲)} \frac{۱۸۰^\circ}{n} = \frac{۱۸۰^\circ}{n+۲} + ۱^\circ \xrightarrow{\times n\,(n+۲)} ۱۸۰^\circ(n+۲) = ۱۸۰^\circ n + n(n+۲)\times ۱^\circ$$

$$\Rightarrow \cancel{۱۸۰^\circ n} + ۳۶۰^\circ = \cancel{۱۸۰^\circ n} + n(n+۲) \Rightarrow n(n+۲) = ۳۶۰^\circ \Rightarrow n(n+۲) = ۱۸ \times ۲۰ \Rightarrow n = ۱۸$$

۱۱۵ **۳** هر زاویهٔ حادهٔ داخلی با یک زاویهٔ خارجی منفرجه مجاور است. از آن‌جایی که مجموع زوایای خارجی نُه‌ضلعی محدب ۳۶۰° است، پس یک نه‌ضلعی محدب، حداکثر سه زاویهٔ منفرجهٔ خارجی دارد، در نتیجه حداکثر سه زاویهٔ حادهٔ داخلی می‌تواند داشته باشد.

نیم‌نگاه

هر n ضلعی محدب، حداکثر سه زاویهٔ منفرجهٔ خارجی دارد، چون مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب ۳۶۰° است. بنابراین هر n ضلعی محدب، حداکثر سه زاویهٔ حادهٔ داخلی دارد.

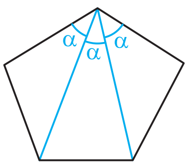
۱۱۶ **۳**

نیم‌نگاه

اگر قطرهای گذرنده از یک رأس n ضلعی محدب را رسم کنیم، $n-۲$ زاویهٔ برابر ایجاد می‌شود.

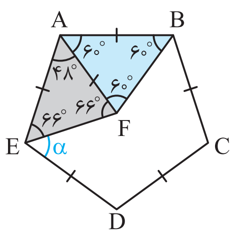
هر زاویهٔ داخلی یک پنج‌ضلعی منتظم برابر $۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{۵} = ۱۰۸^\circ$ است، پس:

$$۳\alpha = ۱۰۸^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۶^\circ$$



۱۱۷ **۲** اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی پنج‌ضلعی منتظم $۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{۵} = ۱۰۸^\circ$ می‌باشد. چون ABCDE منتظم و مثلث ABF متساوی‌الاضلاع است، مثلث AFE متساوی‌الساقین می‌باشد و زاویه‌ها به‌صورت شکل مقابل است و داریم:

$$D\hat{E}F = \alpha = ۱۰۸^\circ - ۶۶^\circ = ۴۲^\circ$$

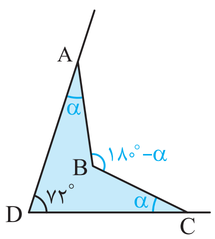


۱۱۸ **۲** اگر اندازهٔ زاویهٔ خارجی n ضلعی منتظم را برابر α فرض می‌کنیم، زاویهٔ داخلی B برابر $۱۸۰^\circ - \alpha$ خواهد بود. در چهارضلعی مقعر ABCD داریم:

$$۱۸۰^\circ - \alpha = \alpha + ۷۲^\circ + \alpha \Rightarrow ۳\alpha = ۱۰۸^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۶^\circ$$

می‌دانیم اندازهٔ زاویهٔ خارجی هر n ضلعی منتظم برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است، پس:

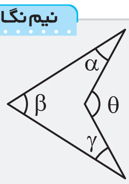
$$۳۶^\circ = \frac{۳۶۰^\circ}{n} \Rightarrow n = ۱۰$$



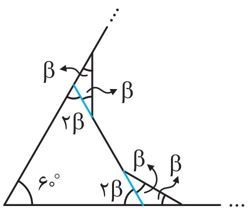
نیم‌نگاه

در چهارضلعی مقعر مقابل، رابطهٔ زیر بین زاویه‌ها برقرار است:

$$\boxed{\theta = \alpha + \beta + \gamma}$$



۱۱۹ ۱ فرض می‌کنیم اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی $ABCDEF\cdots$ برابر β باشد. بنابراین مطابق شکل داریم:



$$۲\beta + ۲\beta + ۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \beta = ۳۰^\circ$$

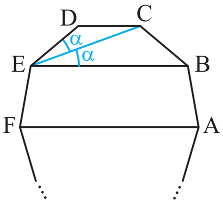
با داشتن زاویهٔ خارجی می‌توانیم تعداد اضلاع $ABCDEF\cdots$ را پیدا کنیم:

$$۳۰^\circ = \frac{۳۶۰^\circ}{n} \Rightarrow n = ۱۲$$

چون هر زاویهٔ خارجی برابر ۳۰° است، پس هر زاویهٔ داخلی برابر $۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ = ۱۵۰^\circ$ می‌باشد و داریم:

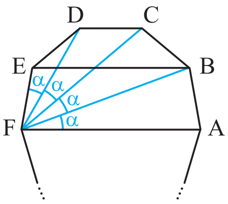
$$\alpha = \frac{۱۵۰^\circ}{۱۲-۲} = ۱۵^\circ$$

۱۲۰ ۳ اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی برابر $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}$ است، بنابراین:



$$\alpha = \frac{\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}}{n-۲} \Rightarrow ۲\times \frac{\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}}{n-۲} = ۴۰^\circ \Rightarrow \cancel{(n-۲)}\times ۱۸۰^\circ = n\cancel{(n-۲)}\times ۲۰^\circ \Rightarrow n = ۹$$

بنابراین هر زاویهٔ داخلی ۹ ضلعی منتظم را به‌دست می‌آوریم:

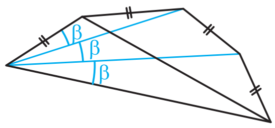


$$۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{n} = ۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{۹} = ۱۴۰^\circ$$

زاویهٔ $E\hat{F}A$ برابر ۴α می‌باشد که α برابر $\frac{۱۴۰^\circ}{۹-۲} = ۲۰^\circ$ است. پس:

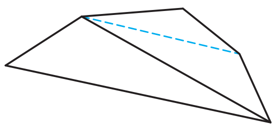
$$E\hat{F}A = ۴\alpha = ۴\times ۲۰^\circ = ۸۰^\circ$$

۱۲۱ ۲ فرض می‌کنیم پنج‌ضلعی، قسمتی از یک n ضلعی منتظم باشد که دو قطر آن رسم شده است، پس:



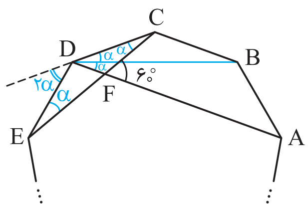
$$۳\beta = ۴۵^\circ \Rightarrow \beta = ۱۵^\circ$$

بنابراین زاویهٔ α برابر است با:



$$\alpha = ۲\times ۱۵^\circ = ۳۰^\circ$$

۱۲۲ ۱ بـه شـکل مقابـل دقـت کنیـد. اگـر $D\hat{C}E = \alpha$ باشـد، $C\hat{D}A = ۲\alpha$ خواهـد بـود. در مثلـث متساوی‌الساقین $E\hat{D}C$ زاویهٔ خارجی D که زاویهٔ خارجی n ضلعی منتظم نیز هست برابر ۲α خواهد بود. در مثلث DFC، زاویهٔ ۶۰°، زاویهٔ خارجی است، پس:

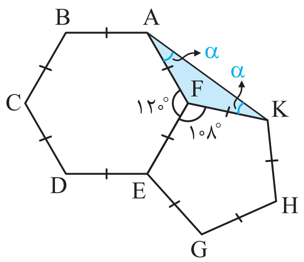


$$\alpha + ۲\alpha = ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۰^\circ$$

بنابراین زاویهٔ خارجی n ضلعی منتظم $۲\alpha = ۴۰^\circ$ است، پس:

$$\frac{۳۶۰^\circ}{n} = ۴۰^\circ \Rightarrow n = ۹$$

۱۲۳ ۳ اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی پنج‌ضلعی منتظم $۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{۵} = ۱۰۸^\circ$ و اندازهٔ هر زاویـهٔ داخلی شش‌ضـلعی منتظم $۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{۶} = ۱۲۰^\circ$ می‌باشد. در ضمن منتظم بودن پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی باعث می‌شـود که مثلث AFK متساوی‌الساقین شود، بنابراین داریم:



$$\hat{F} + ۱۲۰^\circ + ۱۰۸^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{F} = ۱۳۲^\circ$$

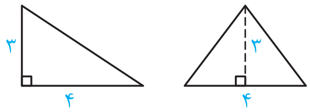
$$\alpha + \alpha + ۱۳۲^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha = ۴۸^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۴^\circ \Rightarrow A\hat{K}F = ۲۴^\circ$$

۱۲۴ ۴ در گزینهٔ (۱) نمی‌دانیم او کیست، پس نمی‌توان فهمید ارزش جمله دقیقاً درست است یا نادرست. در گزینه‌های (۲) و (۳) جمله‌ها خبری نیستند.

۱۲۵ ۱ نقیض گزارهٔ «a از b کوچک‌تر است.» گزارهٔ «a از b بزرگ‌تر و یا با b برابر است.» می‌باشد. در مورد گزینهٔ (۳) هم بد نیسـت بدانیـد کـه چـون مقدار x را نمی‌دانیم نمی‌توانیم بگوییم $x + ۳ = ۰$ دقیقاً درست است یا نادرست، بنابراین گزاره نمی‌باشد.

۱۲۶ ۲ در نقیض گزاره‌های شرطی «اگر p، آن‌گاه q» باید q را نقیض کنیم.

۱۲۷ **۳** دو مثلث شکل مقابل هم‌مساحت هستند ولی هم‌نهشت نمی‌باشند.



۱۲۸ **۴** گزینهٔ (۴) همواره درست است، اما مثال نقض گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به‌صورت زیر می‌باشند:

گزینهٔ (۱): $A = \{۱،۲،۳\}$ ، $B = \{۴،۵،۶\}$

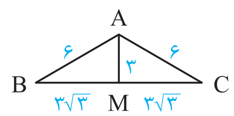
گزینهٔ (۲): مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویهٔ حادهٔ ۲۰°

گزینهٔ (۳): لوزی

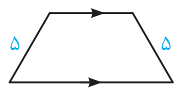
۱۲۹ **۴** گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به کمک برهان خلف اثبات می‌شوند.

۱۳۰ **۴** نقیض حکم را به عنوان فرض خلف درنظر می‌گیریم، بنابراین $BC \leq AC$ فرض خلف می‌باشد.

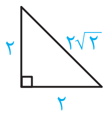
۱۳۱ **۴** مثال‌های زیر مثال نقض برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌باشند:



گزینهٔ (۳)

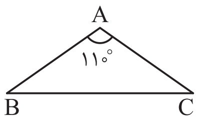


گزینهٔ (۲)

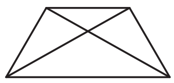


گزینهٔ (۱)

۱۳۲ **۴** چون عکس قضیهٔ «در هر مثلث ضلع مقابل به زاویهٔ ۹۰° بزرگ‌ترین ضلع است.» به‌صورت «در هر مثلث، زاویهٔ مقابل به بزرگ‌ترین ضلع برابر ۹۰° است.» می‌باشد که درست نیست. مثلاً در مثلث مقابل، زاویهٔ مقابل به بزرگ‌ترین ضلع، ۹۰° نمی‌باشد.



۱۳۳ **۴** عکس قضیهٔ «در هر مستطیل، قطرها با هم برابرند.» به‌صورت «هر چهارضلعی که قطرهای برابر داشته باشد، مستطیل است.» می‌باشد که صحیح نیست. شکل مقابل، مثال نقضی برای این گزاره است. بنابراین این قضیه را نمی‌توان به‌صورت دو شرطی بیان کرد.



یادداشت